

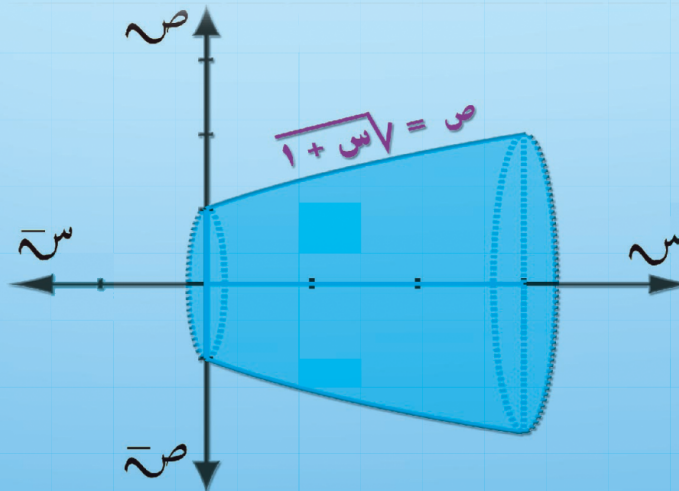


الجمهورية اليمنية  
وزارة التربية والتعليم  
قطاع المناهج والتوجيه  
الإدارة العامة للمناهج

# الرياضيات

## كتاب للتمارين

للفصل الثالث الثانوي (القسم العلمي)



حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٢٠١٧م - ١٤٣٨هـ



<http://www.e-learning-moe.edu.ye/>



الجمهورية الفلسطينية  
وزارة التربية والتعليم  
قطاع المناهج والتوجيه  
الإدارة العامة للمناهج

# الرياضيات

## كتاب التمارين

للفف الثالث الثانوي (القسم العلمي)

### تأليف

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً.

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| د. أمة الإله علي حمد الحوري.    | أ. سالمين محمد باسلوم (منسقاً). |
| د. عوض حسين البكري.             | د. محمد علي مرشد.               |
| د. محمد رشاد الكوري.            | أ. يحيى بكار مصطفى.             |
| د. محمد حسن عبده المسوري.       | أ. عبدالباري طه حيدر.           |
| د. عبدالله سالم بن شحنة.        | أ. نصر محمد بدر.                |
| د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري. | أ. جميلة إبراهيم الرازحي.       |
| د. علي شاهر القرشي.             | أ. عادل علي مقبل البنا.         |
| أ. مريم عبدالجبار سلمان.        | أ. عبدالرحمن عبدالله عثمان.     |
| أ. يحيى محمد الكنز.             |                                 |

### فريق المراجعة:

- أ/ أحمد عبده الصغير الدبعي. / أ/ سميرة حسن فضائل.  
أ/ زايد مقبل عبدالخالق الأغبري. / أ/ محمد صالح الخضر.  
أ/ خالد محمد القلندي.

- تنسيق: أ / سعيد محمد ناجي الشرعبي.  
تدقيق: د/ أمة الإله علي حمد الحوري.  
إشراف: د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

### الإخراج الفني

- الصف والتصميم: جلال سلطان علي إبراهيم.  
إدخال التصويريات: علي عبدالله علي السلفي.

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني.

١٤٣٨هـ - ٢٠١٧م



المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

### أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

- |                                  |                               |
|----------------------------------|-------------------------------|
| أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.      | د/ عبدالله عبده الحامدي.      |
| أ/ علي حسين الحيمي.              | د/ عبدالله سالم لمّلس.        |
| د/ إشراق هائل عبدالجليل الحكيمي. | أ/ أحمد عبدالله أحمد.         |
| أ/ محسن صالح حسين اليافعي.       | د/ فضل أحمد ناصر مطلي.        |
| أ. د/ أحمد علي المعمري.          | د/ صالح ناصر الصوفي.          |
| أ. د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.  | د/ محمد عمر سالم باسليم.      |
| أ. د/ شكيب محمد باجرش.           | أ. د/ داوود عبدالملك الحدابي. |
| أ. د/ صالح عوض عرم.              | أ. د/ محمد حاتم المخلافي.     |
| أ. د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.    | أ. د/ محمد عبدالله الصوفي.    |
| أ. د/ إبراهيم محمد الحوثي.       | د/ عبده أحمد علي النزيلي.     |
| أ/ عبدالله علي إسماعيل الرازحي.  | أ/ محمد عبدالله زبارة.        |
| د. عبدالله سلطان الصلاحي.        |                               |

## تقديم :

في إطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية .

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات .

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها : الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبما يتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي .

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستبناها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها .

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدرسة لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية .

وزير التربية والتعليم

رئيس اللجنة العليا للمناهج

## المقدمة:

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم المرسلين وآله وصحبه وسلم .  
إن إعادة النظر في مناهج الرياضيات وكتبها المدرسية أمر ضروري تحتّمه مواكبة التطور العلمي وتحديث تربويات الرياضيات إضافة إلى مسايرة التغيرات الاجتماعية .  
واستجابة لذلك يأتي هذا الكتاب « كتاب التمارين للصف الثالث الثانوي القسم العلمي » كحلقة ضمن سلسلة متكاملة على مرحلتين: الأساسية ( ١ - ٩ ) والثانوية ( من الأول الثانوي إلى الثالث الثانوي ) .

لقد عُرضت مواضيع الكتاب في تماسك وتكامل وفق تسلسل علمي ونفسي تربوي ، ومراعاة للفروق الفردية تم تقديم المادة الدراسية بأسلوب سلس واضح لا غموض فيه ولا تعقيد ، حيث أوردنا قدرًا كافيًا من الأمثلة بعد العرض النظري واتبعنا ذلك بعدد من التمارين والمسائل آملين إتاحة فرص كثيرة للتعامل مع المادة ليكون الطالب محور التعلم معتمداً على النشاط ويكون النشاط بدافع ذاتي محققاً بذلك الأهداف الوجدانية ، وبعد ذلك جاء كتاب التمارين ليعطي المزيد من التمارين ويفي بالمزيد من الأنشطة حتى يمكن تحقيق أهداف المادة بشكل جيد .

ومن أهم أهداف وزارة التربية والتعليم أن يظل التطوير في نمو وتطور مستمرين ، ذلك بمتابعة كل جديد في تدريس الرياضيات ، وهذا لا يتأتى إلا بالاستفادة من واقع التطبيق في الميدان التدريسي . فإذا راعينا كل المبادئ المذكورة أعلاه بقدر ما وفقنا المولى عز وجل بإعداد هذه المواد التربوية في ضوء استراتيجيات تهدف إلى تقديم الأجود ، مادة وطريقة . . فإننا ننظر بشوق بالغ أن يوافينا كافة ذوي العلاقة بملاحظاتهم بغية الاستفادة منها .

نسأل المولى العلي القدير أن نكون قد وفقنا في كل ما نصبو إليه فهو ولي التوفيق والهادي إلى سواء السبيل .

المؤلفون

## المحتويات

الصفحة	الموضوع
٦	الوحدة الأولى : الأعداد المركبة
١٨	الوحدة الثانية : مبدأ العد ومبرهنة ذات الحدين
٣١	الوحدة الثالثة : القطوع المخروطية
٣٧	الوحدة الرابعة : الهندسة الفضائية
٤٥	الوحدة الخامسة : الاحتمالات
٥٣	الوحدة السادسة : المشتقات وتطبيقاتها
٦٨	الوحدة السابعة : التكامل

# الأعداد المركبة

## الوحدة الأولى

### العدد المركب

١ - ١

[١] أوجد ناتج ما يأتي :

(أ)  $\sqrt{25} \times \sqrt{49}$  . (ب)  $\sqrt{16} + 3 + \sqrt{25} - \sqrt{36} - \sqrt{625}$  .  
 (ج)  $\sqrt{16} \times \sqrt{26} - \sqrt{2} (4 - 7) - 3 (5 - 2)$  .  
 (هـ)  $(\sqrt{2})^6$  .

[٢] اختصر ما يأتي إلى أبسط صورة :

(أ)  $t^7$  ،  $t^{20}$  ،  $t^{30}$  ،  $t$  .  
 (ب)  $t^{-70}$  ،  $(\sqrt{1})^{90}$  ،  $\frac{1}{t}$  ،  $(1 - t)^2$  .

[٣] أثبت أن :

(أ)  $t^3 + t^{13} + t^{23} + t^{33} = 0$  .  
 (ب)  $t^{107} + t^{112} + t^{117} + t^{122} = 0$  .  
 (ج)  $16 = (t + 1)^4 \left( \frac{1}{t} + 1 \right)^4$

[٤] مثل الأعداد المركبة الآتية على مستوى أرجاند ثم مثله بمتجه قياسي .

(أ)  $2 + 3t$  (ب)  $4 - t + (t^3) \times 1$   
 (ج)  $8t$  (د)  $5 - (هـ) 7 - 4t$

[٥] أوجد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للأعداد الآتية :

(أ)  $3 - 2t$  ،  $\frac{t+1}{t-2}$  ،  $4$  .  
 (ب)  $-t$  ،  $5t + \sqrt{16}$  ،  $7 + \sqrt{9}$  .



## جمع وطرح الأعداد المركبة

٢ - ١

[١] بسّط كلٌّ مما يأتي :

$$(أ) (٤ + ٥ ت) + (٢ + ٣ ت)$$

$$(ب) ٢ (٨ + ٢ ت) + (٣ - ٤ ت) + (-٥ + ت)$$

$$(ج) (١٥ + \sqrt[٣]{٣ ت}) + (\sqrt[٥]{٥ + ٩ ت}) - (١٢ - ٦ ت)$$

$$(د) (\sqrt[٩]{٩ - ٤} + ١) - (\sqrt[٤]{٤٩} + ١)$$

[٢] أوجد مجموع كل من أزواج الأعداد المركبة التالية :

$$(أ) (٢ - ٥ ت) ، (-١ + ت) .$$

$$(ب) (٤ + ٥ ت) ، (-٣ + ت) .$$

$$(ج) (٢ - ٤ ت) ، (٢ + ٤ ت) .$$

$$(د) (١٠) ، (٢ ت) .$$

[٣] أوجد قيمة س ، ص في المعادلات التالية :

$$(أ) ٢ ص + ٣ = ٥ - ٤ ت .$$

$$(ب) (٣ ص + ٥ ت) + (٥ ص - ٦ ت) = ١٢ + ٦ ت .$$

$$(ج) ٢ س - ٣ ص + ٥ = ٧ - ٣ .$$

$$(د) ٥ س + ٢ ص = ٩ + س + ت .$$

[٤] إذا كانت  $١ع = ٢ + ت$  ،  $٢ع = ٧ + ٥ ت$  ،  $٣ع = ت - ٢$  ، فأوجد :

$$(أ) ١ع - ٢ع$$

$$(ب) ١ع + ٢ع + ٣ع$$

$$(ج) ١ع + ٢ع - ٣ع$$

## ضرب وقسمة الأعداد المركبة

٣ - ١

[١] بسّط كلٌّ مما يأتي :

$$(أ) (٢ + ٣ ت)(٤ - ٥ ت)$$

$$(ب) (\sqrt[٥]{٥ + ٧ ت})(\sqrt[٢]{٧ - ٧ ت})$$

(ج)  $(1+t)(t-1)(t+2+3)$

(د)  $(1+t)^3 - (t-1)^3$

(هـ)  $(1+t)^2(t+1) - (t-3)(t+4)^2$

[٢] أوجد مرافق الأعداد المركبة التالية :

$9 - t, \sqrt{9-t}, 1-t, t-3, (t+3+4t)^2, -9$

[٣] اكتب مايلي بصورة (س + ت ص) :

(أ)  $\frac{1}{3-\sqrt{2}-}$  (ب)  $\frac{(t+1)(t+2)}{t+3}$

(ج)  $\frac{t^2-6t}{t-3}$  (د)  $\frac{\sqrt{25}-\sqrt{2}-2}{\sqrt{16}-\sqrt{1}-1}$

[٤] أوجد النظير الضربي للأعداد المركبة الآتية :

(أ)  $(1-2t)$  (ب)  $(t+3)^2$

(ج)  $\frac{4}{t+2}$  (د)  $\frac{t^2-3t}{t^2+3t}$

[٥] أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان ما يلي :

$s - t = 5 \quad (t+1)(t-5) = s$

[٦] أثبت أن :  $1 = \frac{(t-2)^2}{t^2-4t-3}$

## الصورة القطبية للعدد المركب

٤ - ١

[١] أوجد مقياس وسعة كلٍّ من الأعداد الآتية ، ثم ضع كلاً منها بالصورة القطبية :

(أ)  $2+2\sqrt{3}t$  (ب)  $2-(1+t)$

(ج)  $\frac{t^2+9t}{t^2-5t}$  (د)  $\frac{t^2+5t+3}{t^2-4t-3}$

[٢] إذا كانت  $E = -1 + \sqrt[3]{3}t$  ، فاكتب الصيغة القطبية للأعداد المركبة الآتية :  $E$  ،  $\bar{E}$  ،  $\frac{1}{E}$  ،  $(\bar{E})^{-1}$  .

[٣] اكتب الأعداد المركبة التالية بالصيغة الجبرية :

(أ)  $2(\text{جتا } 30^\circ + t \text{ جا } 30^\circ)$  (ب)  $3(\text{جتا } 60^\circ + t \text{ جا } 60^\circ)$  .

(ج)  $5(\text{جتا } 180^\circ + t \text{ جا } 180^\circ)$  (د)  $\frac{1}{3}[\text{جتا } (-30^\circ) + t \text{ جا } (-30^\circ)]$  .

[٤] إذا كانت  $E = [1, \text{هـ}]$  ، فاثبت أن :

$$E^2 - \frac{1}{E^2} = 4t \text{ جتا هـ جا هـ} .$$

[٥] إذا كانت  $E = [1, \frac{\pi}{3}]$  ، فاثبت أن :  $(E - \frac{1}{E})^2 = 1$

## القوى والجذور

١ - ٥

[١] أوجد كلاً مما يأتي بالصورة القطبية والصورة الجبرية :

(أ)  $(\text{جتا } \frac{\pi}{6} + t \text{ جا } \frac{\pi}{6})$  (ب)  $(\text{جتا } \frac{\pi}{3} + t \text{ جا } \frac{\pi}{3})$  (ج)  $(\text{جتا } \frac{\pi}{3} + t \text{ جا } \frac{\pi}{3})^4$  .

(ج)  $\frac{3(\text{جتا } 130^\circ + t \text{ جا } 130^\circ)}{2(\text{جتا } 70^\circ + t \text{ جا } 70^\circ)} \times (\text{جتا } \frac{\pi}{6} - t \text{ جا } \frac{\pi}{6})$

[٢] إذا كانت  $E = \sqrt[3]{3}t - 1$  ، فأوجد :  $E^\circ$  ،  $E^{-1}$  ،  $\bar{E}$  .

[٣] أوجد كل مما يأتي :

(أ)  $\sqrt[2]{t}$  (ب)  $\sqrt[2]{-t}$

(ج)  $\sqrt[2]{1-t}$  (د)  $\sqrt[2]{8-t}$

[ ٤ ] أوجد الجذرين التربيعين لكلٍّ من الأعداد المركبة الآتية :

أ (  $\sqrt[3]{2-2}$  ت . ب ) ٩ ت .

ج ( - ٤ ت . د )  $\frac{\sqrt[3]{2-2}}{\sqrt[3]{-2}}$

### حل المعادلات من الدرجة الثانية في م

١ - ٦

[ ١ ] إذا كانت  $ع = (٣ - ٢ ت)$  ، فأثبت أن :  $ع^٢ - ٤ع + ١٣ = ٠$  ،

ثم أوجد قيمة :  $٤ع^٣ - ٣ع^٢ + ١٦٩$  .

[ ٢ ] حل كلٍّ من المعادلات التالية :

أ (  $ع^٢ - ٤ع + ٣ = ٠$  )

ب (  $ع^٢ - (٥ + ٧ ت)ع + (-٦ + ١٧ ت) = ٠$  )

ج (  $ع^٢ + ع - ٢ = ٠$  )

د (  $(س + ص ت) - ١٠ - (س + ص ت) + ٤١ = ٠$  )

[ ٣ ] أوجد مجموعة حل المعادلة :  $ع^٢ = ٢ع + ١$  ،  $ع \in م$  .

## تمارين عامة

[ ١ ] أثبت أن :

$$١ = \frac{ت + \sqrt{٣٧}}{ت - \sqrt{٣٧}} + \frac{ت - \sqrt{٣٧}}{ت + \sqrt{٣٧}} \quad (أ)$$

$$\frac{١}{٢} - = {}^٣-(ت - ١) + {}^٣-(ت + ١) \quad (ب)$$

$$. \quad {}^٢ع + {}^١ع = \overline{{}^٢ع + {}^١ع} \quad (ج)$$

$$[ ٢ ] \text{ إذا كانت } ع = \frac{ت \sqrt{٣٧} + ٤}{ت \sqrt{٣٧} + ١} :$$

( أ ) أوجد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي .

( ب ) اكتب ع بالصيغتين القطبية والجبرية .

$$[ ٣ ] \text{ إذا كانت } {}^١ع = \frac{١}{٥} (ت + ٣) ، {}^٢ع = \frac{ت - ١}{ت + ٢} ، \text{ فأثبت أن :}$$

ع ، ع مترافقان ، ثم احسب قيمة :

$$\frac{{}^٢ع + {}^١ع}{{}^٢ع {}^١ع} \quad (ج) \quad (ب) \quad {}^٢ع {}^١ع \quad (أ) \quad {}^٢ع + {}^١ع$$

[ ٤ ] أثبت أن العدد  $١ + \sqrt{٣٧} ت$  جذر للمعادلة :

$$٠ = ٨ - ع٨ - ٢ع١٢ + ٣ع٧ - ٤ع٢$$

$$[ ٥ ] \text{ إذا كانت } ع = \frac{ت - \sqrt{٣٧}}{٢ + ت} ، \text{ فأوجد مقياس وسعة الأعداد : } ع ، \bar{ع} ، \frac{١}{ع}$$

$$[ ٦ ] \text{ اكتب العدد المركب } \frac{١}{(١ - حتا هـ) + (ت جا هـ)} \text{ بالصيغة الجبرية}$$

[٧] أوجد أصغر عدد صحيح موجب  $d$  بحيث يكون :

$$1 = \left( \frac{t+1}{t-1} \right)^3$$

[٨] أوجد قيمتي  $s$  ،  $v$  اللتين تحققان ما يلي :

$$\frac{v}{2} = \frac{s^2 + 3t}{t-1} + \frac{s+t}{t-1}$$

[٩] اكتب العدد المركب  $E = \frac{8}{\sqrt{3} + 1}$  بالصيغة القطبية ، ثم أوجد جذريه

التربيعيين واكتبهما بالصيغة الجبرية .

[١٠] إذا كانت  $E_1 = [8, 60]$  ،  $E_2 = 5 - \sqrt{3}$  ، فأوجد بالصيغة

القطبية  $E_1$  ،  $E_2$  .

$$[11] \text{ إذا كانت } E_1 = \frac{t-2}{t+10} ، E_2 = \frac{(t-1)^2}{t-3} ،$$

فأثبت أن :  $E_1$  ،  $E_2$  مترافقان ، ثم احسب قيمة  $\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2}$

[١٢] اكتب كلاً من  $(t-3)$  ،  $(t+3)$  بالصيغة القطبية

ثم أوجد قيمة  $\left( \frac{\sqrt{3}t-1}{\sqrt{3}t+1} \right)^{12}$  .

[١٣] إذا كانت  $E_1 = \text{جتا } 17^\circ + \text{تجا } 17^\circ$  ،  $E_2 = \text{جتا } 11^\circ + \text{تجا } 11^\circ$  ،

فاكتب العدد المركب  $E_1^3 E_2^3$  بالصيغة الجبرية .

[١٤] حل المعادلة :  ${}^2\bar{c} + {}^2t = {}^2t$  .

[١٥] إذا كانت  ${}^1c = {}^2t$  ،  ${}^1c \cdot {}^1c = {}^1c$  ، فأوجد بالصيغة القطبية  ${}^1c$  ،  $\sqrt{{}^1c}$  .

[١٦] إذا كانت  ${}^1c = {}^1t + 1$  ،  ${}^1c = {}^1t - 1$  ، فأوجد قيمة  $\sqrt{{}^1c + {}^1c}$  .

[١٧] إذا كانت  ${}^1c = {}^1t - 4$  ،  ${}^1c = {}^1t$  ، فأوجد  $\frac{3}{2}c$  .

[١٨] أوجد قيم  ${}^1c$  ،  ${}^1c$  التي تحقق المعادلة :  $({}^1c + {}^1t) = {}^2t + 7 = {}^2t$  .

[١٩] إذا كانت  ${}^1c = [{}^1m , {}^1h]$  ، فأثبت أن :  $\frac{1}{c} = [\frac{1}{m} , -h]$  .

[٢٠] أثبت أن :  $1 + ({}^1t + {}^1h) = {}^2t = {}^2t + {}^2h$  (جتا ٢ هـ + ت جا ٢ هـ) .

[٢١] إذا كانت  ${}^1c = {}^1t + 1$  ،  ${}^1c = {}^1t - 2$  ، فأوجد :

$$(أ) \quad {}^1c - {}^1\bar{c} \quad (ب) \quad \sqrt{{}^1c + {}^1\bar{c}}$$

[٢٢] حل المعادلتين :

$$(أ) \quad {}^1c = 1 + {}^1t \quad (ب) \quad {}^1c - {}^1\bar{c} = 0 , \quad {}^1c \in \mathbb{R}$$

[٢٣] إذا كانت  ${}^1c = \frac{{}^1t + 1}{\sqrt{2}}$

(أ) أوجد بالصيغة القطبية  $\sqrt[3]{{}^1c}$

(ب) برهن أن :  $\frac{2}{\sqrt{2}} = {}^1c + {}^1\bar{c}$  .

[٢٤] أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان المعادلة :

$$(1 - t)س + (1 + t)ص = ٢ \text{ ت ، ومن ثم أثبت أن : } (س + ت ص) = ١٦ .$$

[٢٥] أوجد الجذر التكعيبي للعدد ٨ ت .

[٢٦] كوّن المعادلات التي جذورها :

$$(أ) (٣ - ٢ \text{ ت}) ، (٣ + ٢ \text{ ت}) .$$

$$(ب) (٤ \text{ ت}) ، (٧ - \text{ت}) .$$

$$(ج) (٣ - \text{ت}) ، (١ + \text{ت}) .$$

$$[٢٧] \text{ أثبت أن : } \left( \frac{\sqrt[3]{٣ \text{ ت}}}{٢} + \frac{١}{٢} \right) = \text{جتا } \varphi + \text{تا جا } \varphi \pi ،$$

حيث  $\varphi$  عدد صحيح .

$$[٢٨] \text{ إذا كانت } \text{ع}_١ = \text{جتا } ٢٥^\circ + \text{تا جا } ٢٥^\circ ، \text{ع}_٢ = \text{جتا } ٢٠^\circ + \text{تا جا } ٢٠^\circ ،$$

فأثبت أن :  $\text{ع}_١ \text{ع}_٢$  أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح .

$$[٢٩] \text{ إذا كانت } \text{ع}_١ = \frac{١}{٢} \text{ع}_٢ \text{ وكانت } \text{ع}_٢ = [٦ ، \frac{\pi}{٣}] ، \text{ فأوجد } \text{ع}_١ \text{ع}_٢ .$$

[٣٠] أثبت أن مرافق حاصل ضرب عددين مركبين يساوي حاصل ضرب مرافقي العددين .

$$[٣١] \text{ إذا كانت } \text{ع} = \sqrt[3]{٣} + \text{ت} ، \text{ فأوجد } \text{ع}^٦ .$$

$$[٣٢] \text{ احسب } \left( \frac{\text{ت}}{\text{ت} + \sqrt[3]{٣}} \right)^{١٢} .$$



$$[33] \text{ أوجد المقياس والسعة للعدد } ع = \frac{(1 + \sqrt{3}i)(-t + \sqrt{3})}{512t},$$

ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع .

$$[34] \text{ إذا كانت } ع = ٤ \text{ (جتاه + ت جاه) ، ظاه} = \frac{٥}{12} \text{ ، حيث}$$

$$\text{هـ} \ni [\frac{\pi 3}{2}, \pi], \text{ فأوجد بالصيغتين الجبرية والقطبية العدد المركب } \frac{1}{ع}.$$

[35] أوجد ما يأتي :

$$\text{أ ( } \sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i} \text{ ب ( } \sqrt[3]{32} \text{ ج ( } \sqrt[6]{1+\sqrt{3}i} \text{ .}$$

[36] أوجد قيم س ، ص الحقيقية التي تحقق المعادلة :

$$٠ = (س + ت ص) + ٢٤ + ٧ + ٢ت$$

$$[37] \text{ إذا كانت } ع = [١, مر, هـ], [٢, مر, هـ] = [٢, مر, هـ] . \text{ برهن أن :}$$

$$ع = [٢, مر, مر, هـ + هـ] .$$

$$[38] \text{ إذا كانت } ع = [١, \frac{\pi}{3}] \text{ فاثبت أن } (ع + \frac{1}{ع}) = ١ .$$

$$[39] \text{ إذا كانت } ع = ١ - \sqrt{3}i \text{ ، ت} = ١ + ع \text{ ، ع} = \frac{١}{٢} \text{ ، فأوجد مقياس}$$

$$\text{وسعة العدد المركب ع ، ومن ثم أثبت أن : } ع = ٦٤ + ١٢$$

$$[40] \text{ إذا كانت } ع = ٢ - ت \text{ ، ع} = ٣ - ٤ت \text{ ، فاثبت أن : } ١ = \frac{(١ع)}{٢ع} .$$

[٤١] إذا كانت  $E = [M, H]$  وكانت  $E^2 = [\frac{\pi}{3}, 4]$ ، أوجد قيم  $M, H$ ،

ثم حدّد  $(\exists \tau)$  التي تجعل يكون  $E$  عدداً تخلياً صرفياً.

[٤٢] إذا كانت  $E^2 - E^2 = E^2 - E^2$ ، حيث  $E = S + T$ ،

$E^2 = [2, H]$ ، برهن أن:  $S = 2$  جا  $2H$ .

[٤٣] أوجد  $(\frac{\sqrt{3}-1}{2})^8 + (\frac{\sqrt{3}-1}{2})^0$

[٤٤] أثبت أن:  $2^t = \frac{3(t+1)}{2^{t-3}(t-1)}$ ،  $(\exists^+ S)$

ثم استخدم ذلك في إيجاد  $\frac{2^3(t-1)}{2^{t-3}(t+1)}$

[٤٥] إذا كانت  $E = \frac{\sqrt{2}}{4}(t - \sqrt{3})$ ،  $E = t - 1$ ، فأوجد  $\frac{1}{E}$  بالصيغة

القطبية ومن ذلك استنتج أن:

جنا  $\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{12}$ ،  $(1 + \sqrt{3})$ ، جا  $\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{12}$ ،  $(1 - \sqrt{3})$ .

[٤٦] لتكن  $L = \frac{t+4}{t-4}$ ،  $E = S + T$ ،

فإذا كان  $L$  عدداً تخلياً صرفاً، فأثبت أن:  $S = \pm (4 + S)$ .

[٤٧] حل المعادلات الآتية:

(أ)  $E + 2\bar{E} = 3 - t$ .

(ب)  $E^2 - \bar{E} = 0$ .

## اختبار الوحدة

[ ١ ] بسّط كل ممّا يأتي :

أ (  $(١ - ت^٥) (١ - ت^١٠) (١ - ت^٥)$  )

ب (  $(\sqrt{٧٠} - \sqrt{٣٢}) \sqrt{٢}$  )

[ ٢ ] أثبت أن الفرق بين العددين المترافقين هو عدد تخيلي صرف .

[ ٣ ] إذا كانت  $١ + ت = ع$  ،  $٢ - ٥ ت = ع$  ، فأوجد :

أ (  $ع١ ع٢$  بالصيغة القطبية

ب (  $\sqrt[٢]{ع١ + ع٢}$  )

[ ٤ ] حل المعادلة الآتية :

(  $١ + ت$  )  $ع + ٣ ت = ١ - ٣ ت$

[ ٥ ] أوجد :  $(\frac{\sqrt{٣} - ١ - \sqrt{٢}}{٢})^{٢٠}$

# مبدأ العد ومبرهنة ذات الحدين

## الوحدة الثانية

### مبدأ العد

١ - ٢

[ ١ ] يختار طالب جامعي في الفصل الدراسي الأول ثلاثة مقررات : واحد في الرياضيات والثاني في الفيزياء والثالث في الكيمياء ، فإذا كانت المقررات المتاحة أمامه للاختيار هي ٤ مقررات في الرياضيات ، ٣ مقررات في الفيزياء ، ٥ مقررات في الكيمياء ؛ فما عدد الطرق المحتملة لاختيار مقرراته الثلاثة ؟

[ ٢ ] كم عدداً يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام على الأكثر باستخدام الأرقام ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ؛ دون تكرار أي رقم في العدد الواحد ؟

[ ٣ ] كم عدداً زوجياً مكوناً من رقمين على الأكثر يمكن تكوينه باستخدام الأرقام ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٧ دون تكرار أي رقم في العدد الواحد ؟

[ ٤ ] كم عدداً يمكن تكوينه من رقمين باستخدام الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ؟  
 أ) دون تكرار أي رقم في العدد الواحد .

ب) مع إمكانية تكرار الرقم الواحد .

[ ٥ ] كم طريقة يمكن بواسطتها أن يستخدم سبعة أشخاص سبعة أجهزة تلفون في دائرة حكومية في آن واحد ، علماً بأن هناك عشرة أجهزة في الدائرة ، ويستخدم كل شخص منهم فقط هاتفاً واحداً ؟

[ ٦ ] ينتج مصنع للأقمشة ثلاثة أصناف ممثلة بالمجموعة  $S = \{\text{صوف ، قطن ، حرير}\}$  ، ومن كل صنف ينتج ثلاثة ألوان ممثلة بالمجموعة  $V = \{\text{أزرق ، بنى ، أخضر}\}$  ومن كل صنف ولكل لون ينتج قياسين للعرض ممثلة بالمجموعة  $\{100 \text{ سم}\}$  ، فما عدد الأنواع التي ينتجها المصنع ؟

[ ٧ ] يقدم مطعم ٨ أصناف من اللحم ، ٥ أصناف من الخضار ، ٣ أصناف من الخبز ، ٤ أنواع من الفاكهة ، كم عدد الوجبات المختلفة التي يمكن أن يقدمها المطعم على أن تتكوّن كل وجبة من لحم وخضار وخبز وفاكهة .

[ ٨ ] كم عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها أربعة أشخاص على ستة مقاعد

موضوعة في صف على استقامة واحدة ؟

[ ٩ ] كم عدداً فردياً مكوناً من رقمين على الأكثر يمكن تكوينه باستخدام الأرقام

٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ؟ .

[ ١٠ ] ما عدد طرق اختيار مدرس واحد وطالب واحد من بين ٥ مدرسين و ٩ طلاب

للمشاركة في تمثيل مدرسة ما في ندوة تربوية ؟

[ ١١ ] يستطيع رجل السفر من مدينة تعز إلى مدينة الحديدة بالبر أو الجو ، ومن مدينة

الحديدة إلى مدينة جدة بالبر أو الجو أو البحر ، فما عدد الطرق المختلفة التي

يمكن أن يصل بها الرجل من تعز إلى جدة مروراً بالحديدة ؟

## التباديل

٢ - ٢

[ ١ ] أملأ الفراغات فيما يأتي لتحصل على عبارات صحيحة :

( ب )  $\square \times \square \times \square = ٦!$

( أ )  $\square! = \square$

( د )  $٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = \square!$

( ج )  $\square! = \frac{٧}{\square!}$

( و )  $\frac{٨!}{\square!} = \square!$

( هـ )  $\square! = ٨ \times ٧ \times ٦$

( ز )  $\square! = \frac{\square!}{٤!}$

[ ٢ ] ضع العلامة (√) أمام العبارة الصائبة والعلامة (X) أمام العبارة الخطأ في كلِّ

مما يأتي ، مع تصويب الخطأ أينما وجد :

أ ( )  $\underline{٧} + \underline{٤} = \underline{٧+٤}$

ب ( )  $\text{ل}^{\circ} = \text{ل}^{\circ}$

ج ( )  $\underline{٨} \times ٩٠ = \underline{٨٠}$

د ( )  $\underline{٢} = \frac{\underline{١٠}}{\underline{٥}}$

هـ ( )  $\underline{١٢} = \underline{٤} \times \underline{٣}$

و ( )  $\frac{\underline{٧}}{\underline{٣}} = \text{ل}^{\circ}$

ز ( )  $\underline{١٨} = \underline{٣} \times \underline{٦}$

ح ( )  $\underline{٢} - \underline{٣} = \underline{١}$  ، حيث  $\text{د} \in \text{ط}^*$  ،  $\text{د} \leq \text{م}$  .

[ ٣ ] أوجد قيمة كلِّ مما يأتي :

أ ( )  $\text{ل}^{\circ}$  ب ( )  $\text{ل}^{\circ}$

ج ( )  $\text{ل}^{\circ}$  د ( )  $\text{ل}^{\circ}$  هـ ( )  $\frac{\text{ل}^{\circ}}{\underline{٥} \times \text{ل}^{\circ}}$

و ( )  $\frac{\underline{٢}}{\underline{٤}} - \frac{\underline{٢}}{\underline{٣}}$  ز ( )  $\frac{\underline{٥}}{\underline{٢} \underline{٣}}$

[٤] أوجد قيمة  $\frac{d}{e} \Rightarrow ط^*$  في كل ممائتي :

(أ)  $\frac{d}{e} = 120$  (ب)  $\frac{d}{e} = 5040$

(ح)  $\frac{d}{e} = 3600$  (د)  $\frac{d}{e} = 3600$

(هـ)  $\frac{d}{e} = 1 - \frac{1}{e}$

(و)  $\frac{d}{e} = 3 = \frac{d}{e}$  (ز)  $\frac{d}{e} = \frac{2 + \frac{d}{e}}{\frac{d}{e}}$

[٥] اختصر كلاً ممائتي إلى أبسط صورة :

(أ)  $\frac{\frac{1+d}{e} \frac{1-d}{e}}{\frac{1-d}{e} \frac{1+d}{e}}$  (ب)  $\frac{\frac{1+d}{e} \frac{1-d}{e}}{\frac{1-d}{e} \frac{1+d}{e}}$

(ج)  $\frac{d}{e} = \frac{1+d}{e} \div \frac{d}{e}$  (د)  $\frac{(\frac{d}{e})^2}{\frac{1-d}{e} \frac{1+d}{e}}$

(هـ)  $\frac{\frac{11}{e}}{\frac{9}{e}} + \frac{\frac{12}{e}}{\frac{10}{e}}$

[٦] حل المعادلات التالية :

(أ)  $\frac{d}{e} = 720$

(ب)  $\frac{d}{e} = 336$

(ج)  $\frac{d}{e} = 11880$

(د)  $\frac{d}{e} = 2520$

(هـ)  $\frac{d}{e} = \frac{\frac{d}{e}}{\frac{d}{e}}$

[٧] أثبت أن :

$$(أ) \quad ٢٠ + ٥٩ + ٢٥ = \frac{٥+٢}{٣+٢}$$

$$(ب) \quad ٢٧ = ٢٧$$

$$(ح) \quad ٢ = (١٩ \times ١٧ \times ١٥ \times ١٠٠٠ \times ٥ \times ٣ \times ١) \quad (١)$$

[٨] حل كل زوج من المعادلتين آنياً فيما يلي :

$$(أ) \quad ٢٠ = ٢٧^{-٣} \quad ، \quad ٥٠٤ = ٢٧^{+٣}$$

$$(ب) \quad ١٢ = ٢٧^{-٢} \quad ، \quad ٩٠ = ٢٧^{+٢}$$

[٩] كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام التسعة

١، ٢، ٣، ... ٩ بدون تكرارها ؟

[١٠] في مسرح توجد ٨ مقاعد خالية في صف ، ما عدد الطرق التي يمكن بها أن

يجلس ٥ أشخاص ؟

[١١] كيف يمكن ترتيب ٥ كتب مختلفة على رف ؟

[١٢] كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من المجموعة { ١، ٢، ٣ } .

بدون تكرار مرة ، مع التكرار مرة أخرى ؟

[١٣] كم عدداً يتألف كل منها من أربعة أرقام مختلفة يمكن تكوينها من عناصر

المجموعة { ١، ٣، ٥، ٧، ٩ } ؟

[١٤] كم عدداً مكوناً من أربعة أرقام مختلفة يمكن تكوينها من الأرقام

٣، ٤، ٥، ٦ ؟

[١٥] خمس معلمات وخمس طالبات يريدن الجلوس على عشرة مقاعد موضوعة

في صف على استقامة واحدة ، بحيث تجلس المعلمات متجاورات ، وتجلس

الطالبات متجاورات ، ما عدد الطرق التي يمكن أن يتم بها ذلك ؟



## التوافيق

٣ - ٢

[ ١ ] ضع العدد المناسب داخل □ في كل مما يأتي لتحصل على عبارة صائبة :

$$\frac{12}{\square \times 9} = {}_9P_{12} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{\square}{3 \times \square} = {}_6P_9 \quad (\text{أ})$$

$$\frac{\square}{6 \times 9} = {}_9P_{10} \quad (\text{د})$$

$$\square = {}_{10}P_{14} \quad (\text{ج})$$

$${}_{12}P_{\square} = {}_3P_{\square} \quad (\text{و})$$

$$\square = {}_4P_9 + {}_5P_9 \quad (\text{هـ})$$

[ ٢ ] ضع العلامة (✓) أمام العبارة الصائبة، والعلامة (X) أمام العبارة الخطأ في كل مما يأتي مع ذكر السبب :

$${}_3P_9 = {}_3P_8 + {}_4P_8 \quad (\text{ب})$$

$${}_4P_4 = {}_5P_4 \quad (\text{أ})$$

$${}_5P_6 \times {}_6P_7 = {}_6P_6 \quad (\text{د})$$

$${}_6P_6 = {}_6P_8 \quad (\text{ج})$$

$${}_6P_8 = {}_6P_6 \quad (\text{هـ})$$

[ ٣ ] أوجد قيمة كل مما يأتي :

$${}_9P_{100} \quad (\text{ج})$$

$${}_{10}P_{20} \quad (\text{ب})$$

$${}_4P_{10} \quad (\text{أ})$$

[ ٤ ] أوجد قيم د التي تحقق المعادلات التالية :

$$45 = {}_{3-d}P_3 \quad (\text{ب})$$

$${}_4P_3 = {}_3P_3 \quad (\text{أ})$$

$${}_7P_3 = {}_6P_3 \quad (\text{د})$$

$${}_{3+d}P_7 = {}_{5-d}P_7 \quad (\text{ب})$$

[٥] أ) إذا كان  $٣٠٠ = ٣٠٠ + ٥$  ، وكانت

$١٠٠ : ١١ = ٥ : ٥$  ، أوجد قيم  $٥$  ،  $٥$  .

ب) لتكن  $٨٤٠ = ٣٥$  ، فما قيم كل من  $٥$  ،  $٣٥$  ؟

ج) إذا كان  $٨ = ٨$  ، وكانت .

$٣ : ٨ = ٣ : ٨$  ؛ فما قيم  $٥$  ،  $٣$  ؟

د) إذا كان  $٩ : ٧ = ٩ : ٧$  .

وكانت  $١٠٠ : ٣٠٠ = ٣ : ٥$  ؛ فما قيم كل من  $٥$  ،  $٣$  ؟

[٦] أوجد عدد توافيق الحروف الأربعة أ ، ب ، ج ، د مأخوذة اثنين اثنين .

[٧] ما عدد الطرق التي يمكن بها اختيار فريق كرة قدم مكوّن من أحد عشر لاعباً

من بين ١٥ طالباً متميزاً في اللعبة ؟

[٨] يراد تشكيل جمعية الفيزياء في مدرسة ، بحيث تتألف من ٣ مدرسين ، ٥

طلاب ، بكم طريقة يمكن اختيار أعضاء الجمعية من بين ٨ مدرسين ، ١١ طالباً ؟

[٩] كم طريقة مختلفة يمكن بها تشكيل لجنة مكونة من ٤ مدراء على الأقل من بين

٦ مدراء ؟

[١٠] مجلس إدارة شركة يتألف من ٦ أعضاء :

أ) بكم طريقة يمكن أن نختار رئيساً وأميناً ومحاسباً ؟

ب) بكم طريقة يمكن أن نختار ثلاثة أعضاء دون تعيين وظائف لهم ؟

## مبرهنة ذات الحدين

٢ - ٤

[ ١ ] أوجد مفكوك ما يأتي :

- أ ( ٢س - ١ )<sup>٤</sup>      ب ( ٢س - ٢ )<sup>٤</sup>  
 ج ( ٣س + ١ )<sup>٥</sup>      د ( ٣س + ١ )<sup>٦</sup>  
 هـ ( ٣س + ٣ )<sup>٤</sup>      و ( ٣س + ٣ )<sup>٥</sup>  
 ز ( ٣س + ٧ )<sup>٤</sup>      ح ( ٢س - ٢ )<sup>٦</sup>

[ ٢ ] أوجد مفكوك ما يأتي إلى الحد الرابع :

- أ ( ٢س + ١ )<sup>١٠</sup>      ب ( ٣س - ٣ )<sup>١٢</sup>  
 ج ( ٢س + ١ )<sup>١١</sup>      د ( ١س - ١ )<sup>٨</sup>  
 هـ ( ٢س - ٣ )<sup>١٣</sup>      و ( ١س - ١ )<sup>١٥</sup>  
 ز ( ٢س - ٣ )<sup>١٤</sup>

[ ٣ ] أوجد كل مماتي :

- أ ح من مفكوك ( ٢س - ٤ )<sup>٧</sup>  
 ب ح من مفكوك ( ٣س + ١ )<sup>١١</sup>  
 ج ح من مفكوك ( ٣س - ١ )<sup>١٢</sup>  
 د ح من مفكوك ( ٣س - ٢ )<sup>١٠</sup>  
 هـ الحد الأوسط من مفكوك ( ٣س - ٣ )<sup>٦</sup>  
 و الحدين الأوسطين من مفكوك ( ٢س + ١ )<sup>٧</sup>  
 ز الحد الذي يحوي س من مفكوك ( ٣س + ٤ )<sup>٧</sup>

ح) الحد الذي يحوي  $s^{10}$  في مفكوك  $(s^3 + \frac{1}{s})^7$  (إن أمكن).

ي) الحد الذي يحوي  $s^{-4}$  في  $(s + \frac{1}{s^2})^8$ .

ط) الحد الخالي من  $s$  في مفكوك  $(s^4 + \frac{1}{s^2})^{10}$ .

[ ٤ ] احسب ما يأتي باستخدام مفكوك ذي الحدين :

$(1, 3)^6$  ،  $(2, 01)^0$  مقرباً الناتج إلى أقرب ثلاثة منازل عشرية .

### تمارين عامة

[ ١ ] أوجد ما يأتي :

أ)  $(\frac{1}{s})^{20}$  ،  $(\frac{1}{s})^{17}$  ،  $(\frac{1}{s})^{10}$  ،  $(\frac{1}{s})^8$  .

ب)  $(\frac{1}{s})^0$  ،  $(\frac{1}{s})^7$  ،  $(\frac{1}{s})^4$  ،  $(\frac{1}{s})^{20}$  .

ج) م ، د إذا كان .

$(\frac{1}{s})^{30} = (\frac{1}{s})^{2-2}$  ،  $(\frac{1}{s})^{90} = (\frac{1}{s})^{3-2}$  .

د) الحد الخالي من  $s$  في مفكوك  $(\frac{2}{s} - \frac{s}{3})^{10}$  .

هـ) الحد الذي يحوي  $s^7$  في مفكوك  $(\frac{3}{s} + 2s)^{14}$  .

[ ٢ ] الحد الرابع في مفكوك  $(s+1)^3$  يساوي  $\frac{25}{3}$  من المرات الحد الثاني والحد

الخامس يساوي الحد السادس أوجد قيمة كل من د ، س .

[ ٣ ] أوجد قيمة الحد الأوسط في مفكوك  $(s^5 + 1)^{10}$  ، حيث  $s = \frac{1}{8}$  .

[ ٤ ] في مفكوك  $(s+1)^{39}$  إذا كان الحد الخامس عشر يساوي الحد التالي له ،

فأوجد قيمة س .

- [٥] أوجد معامل  $s^3$  في مفكوك  $(s^2 + s - 1)^3$  .
- [٦] أوجد الحد الخالي من  $s$  في مفكوك  $(s^2 + \frac{3}{s})^{21}$  .
- [٧] (أ) أثبت أن:  ${}_1\omega^{1+3} = {}_1\omega^3 = {}_1\omega^3$  .  
 (ب) وإذا كانت قيمة  ${}_1\omega^3 = 120$  ، أوجد قيمة  ${}_1\omega^{1+3}$  .
- [٨] في مفكوك  $(s^2 + 3s + 1)^4$  ،  ${}_1\omega = \frac{1}{4}$  ح ، أوجد قيمة  $s$  .
- [٩] إذا كان  ${}_1\omega^{2+3} = 720$  ،  ${}_1\omega^3 = 3$  ، فأوجد قيمة  ${}_1\omega^{2-3}$  ،  
 حيث  $m$  ،  $\exists \omega^+$  ،  $m < \omega$  .
- [١٠] إذا كانت نسبة معامل الحد السادس إلى معامل الحد الرابع في مفكوك  $(\frac{2}{3}s + s)^3$  يساوي  $8 : 27$  ، فأوجد  $\omega$  .
- [١١] (أ) أثبت أن:  ${}_1\omega^{1+3} \div {}_1\omega^3 = (1 + \omega) \div (1 + \omega - \omega)$  .  
 (ب) أوجد النسبة بين  ${}_1\omega$  في مفكوك  $(s^2 + 2s + 1)^4$  ،  ${}_1\omega$  في مفكوك  $(s^3 + 3s + 1)^{10}$  وإذا كانت هذه النسبة تساوي  $\frac{4}{5}$  فما قيمة  $s$  ؟
- [١٢] في مفكوك  $(\frac{2}{s^3} + \frac{s^3}{2})^3$  النسبة بين  ${}_1\omega : {}_2\omega : {}_3\omega$  ، يساوي  $40 : 24 : 11$  ، أوجد قيمة كل من  $\omega$  ،  $s$  ، ثم أوجد الحد الأوسط في المفكوك .

[١٣] إذا كان :

$${}_1\omega : {}_2\omega = 1 : 5$$

$${}_1\omega : {}_2\omega = 5 : 7$$

أوجد قيم  $\omega$  ،  $m$  .

[١٤] أوجد كلاً من الحد الأوسط والحد الذي يحتوي على  $s^{-3}$  في مفكوك

$$\left( \frac{s^2}{s^3} + \frac{3}{s^2} \right)^{13}, \text{ وإذا كانت النسبة بين هذين الحدين تساوي } 9 : 7$$

فما قيمة  $s$  ؟

[١٥] بكم طريقة يمكن لعشرة أشخاص أن يجلسوا على عشر كراسي ؟

(١) إذا وضعت الكراسي على شكل دائري .

(٢) إذا وضعت الكراسي في صف مستقيم .

[١٦] ليكن  $s = \{ ١ , ٢ , ٣ , ٤ , ٥ , ٦ , ٧ , ٨ , ٩ , ١٠ \}$  ، كم عدد الكلمات التي تبدأ بالحرف ١ والمؤلفة من أربعة حروف يمكن تكوينها من هذه الحروف .

[١٧] ما عدد تباديل أحرف كلمة العزيزية ؟

[١٨] تقرر تشكيل لجنة من ٨ أشخاص من ذوي الخبرات المختلفة على النحو التالي :

٣ أطباء ، ٢ اقتصاديين ، ٢ مهندسين ، محامي واحد .

علماً أن المجموعة المطلوب تكوين اللجنة منهم تتكون من :

٨ أطباء ، ٦ مهندسين ، ١٢ محامي ، ٤ اقتصاديين .

ما عدد الطرق التي يمكن بها تكوين اللجنة ؟

[١٩] كم عدداً مكوناً من أربعة أرقام مختلفة يمكن تكوينها من الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ؟

[٢٠] اختصر كلاً مما يأتي إلى أبسط صورة :

$$\begin{aligned} \text{(أ)} \quad & \frac{1-x + x}{1-x - x} \\ \text{(ب)} \quad & \frac{(x)^2}{1-x \quad 1+x} \\ \text{(ج)} \quad & x^3 \div x^{1-3} \\ \text{(د)} \quad & \frac{x^{1-3}}{x^{1-3}} \end{aligned}$$

[ ٢١ ] أوجد عدد الطرق المختلفة لاختيار لجنة مكونة من ٤ أعضاء من بين ١٢ شخصاً .

[ ٢٢ ] أوجد عدد الطرق المختلفة لاختيار ٦ أسئلة للإجابة عنها في امتحان يشتمل على ٩ أسئلة إذا علم أن سؤالاين منها اجباريين .

[ ٢٣ ] أ) أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار ٥ كتب على الأقل من بين ١٠ كتب مختلفة؟

ب) أوجد عدد الطرق الممكنة لاختياره كتب على الأكثر من بين ١٠ كتب مختلفة؟

[ ٢٤ ] مجلس إدارة شركة يتألف من عشرة أشخاص :

أ) بكم طريقة يمكن أن تختار منهم رئيساً وأميناً ومحاسباً ؟

ب) بكم طريقة يمكن أن نختار ثلاثة أعضاء دون تعيين وظائف لهم ؟

## اختبار الوحدة

[ ١ ] أ) طالب لديه ٥ كتب مختلفة ويريد وضع ٣ منها متجاورة على رف مكتبته، فبكم طريقة يمكنه ترتيبها ؟

ب) بكم طريقة يمكن لمدرس أن يختار ثلاثة كتب من بين خمسة ليقدمها جوائز للطلبة الثلاثة الأوائل ؟

[ ٢ ] أوجد ما يأتي : أ)  $٢٠$  ، ب)  $(١٠)$

[ ٣ ] يراد تكوين أعداد كل منها مكوناً من رقمين من الأرقام ٢ ، ٤ ، ٦ ، كم عدداً يمكن الحصول عليه :

عندما يسمح بتكرار الرقم ( ٢ ) ، وعندما لايسمح بتكرار هذا الرقم ؟ [ ٤ ] أوجد ما يأتي :

( ١ ) قيمة  $٨$  إذا كان  $٨ = ٢٠$  :

( ٢ ) معامل الحد الذي يحوي  $س$  في مفكوك  $(س٢ - \frac{١}{س})^{١٠}$

[ ٥ ] أوجد ما يأتي :

( ١ ) مفكوك  $(٢٢ + ب)$  :

( ٢ ) الحد الأوسط في مفكوك  $(٣ - \frac{١}{٢})^{١٠}$

( ٣ ) الحد الخالي من  $س$  في مفكوك  $(٣س٣ - \frac{١}{س})^{١٠}$

[ ٦ ] إذا كان  $١٢ح = ١٤ح$  في مفكوك  $(١ - س)^{٢٠}$

أوجد قيمة  $س$  ،  $س \neq ٠$



### القطع المكافئ

٣ - ١

[ ١ ] أوجد معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الشروط الآتية :

( أ ) البؤرة ( -٣ ، ٨ ) ، الرأس ( ٠ ، ٠ )

( ب ) معادلة الدليل  $\frac{y}{3} = x$  ، الرأس ( ٠ ، ٠ )

( ج ) البؤرة ( ٠ ، ٥ ) ، الدليل  $x = ٥$

[ ٢ ] أوجد إحداثي البؤرة ومعادلة الدليل ، ثم ارسم القطع المكافئ في الحالات التالية :

( أ )  $x^2 = ١٦ - y$  ( ب )  $x^2 = ١٢ - y$  س

( ج )  $x^2 = ٩ - y$  س

[ ٣ ] أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومحوره هو المحور الصادي ويمر بالنقطة ( ٢ ، ٣ ) .

[ ٤ ] أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته ( -١ ، ٢ ) ومعادلة دليله  $x - ٢ = ٣ + y$

### القطع الناقص

٣ - ٢

[ ١ ] أوجد طولى المحورين ، التخالف المركزي وإحداثيات البؤرتين والرأسين للقطع الناقص الآتية :

( أ )  $x^2 + ١٦٩ + y^2 = ٤٢٥$  . ( ب )  $x^2 + ٢ + y^2 = ٦$

[ ٢ ] أوجد معادلة القطع الناقص الذي يحقق الشروط الآتية :

( أ ) الرأسان ( ٠ ،  $\pm ٥$  ) ، البؤرتان ( ٠ ،  $\pm ٤$  )

( ب ) التخالف المركزي  $\frac{4}{5}$  ، الرأسان ( ٠ ،  $\pm ١٠$  )

( ج ) الرأسان ( ٠ ،  $\pm ٥$  ) ، ويمر بالنقطة ( ٣ ، ٣ )

[ ٣ ] أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه  $(٥, ٣)$  ،  $(-٢, -٦)$  وطول محوره الأكبر ٢٠ .

[ ٤ ] أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه  $(٠, ٦ \pm)$  ودليلا انسحاب  $س = ٩ \pm$  .

## القطع الزائد

٣-٣

[ ١ ] أوجد طولى المحورين، التخالف المركزي وإحداثيات الرأسين والبؤرتين للقطوع الزائدة الآتية :

$$أ) \quad ١٦س^٢ - ٩ص^٢ = ٥٧٦$$

$$ب) \quad ٢٥س^٢ - ١٤٤ص^٢ = ٩٠٠$$

[ ٢ ] أوجد معادلة القطع الزائد الذى يحقق الشروط الآتية :

$$أ) \quad \text{الرأسان } (٠, ٤ \pm) , \text{ البؤرتان } (٠, ٦ \pm)$$

$$ب) \quad \text{التخالف المركزي } \frac{٥}{٣} , \text{ البؤرتان } (٠, ٦ \pm)$$

$$ج) \quad \text{الرأسان } (٠, ٤ \pm) \text{ ويمر بالنقطة } (٥, -٢)$$

[ ٣ ] أوجد إحداثيات الرأسين والبؤرتين ومعادلات المستقيمين المقاربين والدليلين

للقطوع الزائدة الآتية :

$$أ) \quad ٢٥س^٢ - ٨ص^٢ = ٢٠٠$$

$$ب) \quad ٤س^٢ - ٤ص^٢ = ٤$$

[ ٤ ] أوجد معادلة المنحنى الذي ترسمه النقطة  $د$  التي تتحرك بحيث يكون الفرق بين

بعديها عن النقطتين  $(٠, ٢)$  ،  $(١٢, ٢)$  يساوي ٣

## انسحاب المحاور الإحداثية

٣ - ٤

[ ١ ] أوجد معادلة كل من القطوع المخروطية الآتية :

( أ ) قطع مكافئ رأسه ( ٠ ، ١ ) وبؤرته ( ٠ ،  $\frac{5}{4}$  ) .

( ب ) قطع ناقص رأساه ( ٢ ، ٣ ) ، ( ٢ ، ٥ ) وبؤراته ( ٢ ، ٢ ) ، ( ٢ ، ٤ ) .

( ج ) قطع زائد رأساه ( ٢ ، ٦ ) ، ( ٢ ، ٠ ) وبؤراته ( ٢ ، ٧ ) ، ( ٢ ، ١ ) .

[ ٢ ] بين نوع المنحني الذي تمثله كل من المعادلات الآتية :

( أ )  $ص^2 - ٤س + ١٠ص + ٥ = ٠$

( ب )  $٤س^2 + ٩ص^2 - ٨س - ٥٤ص + ٤٩ = ٠$

( ج )  $ص^2 - ٢س - ٢ص + ٦ص + ٧ = ٠$

[ ٣ ] أثبت أن المعادلة :

$$٤س^2 + ١٦ص^2 - ٢٤س - ٣٢ص = ١٢$$

تمثل قطعاً ناقصاً ثم أوجد :

( أ ) تخالفه المركزي . ( ب ) إحداثيات رأسية .

( ج ) إحداثيات بؤرته . ( د ) معادلتي دليليه .

## دوران المحاور الإحداثية

٣ - ٥

[ ١ ] أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه ( ٠ ، ٣ ) ، طول محوره الأكبر يساوي ٣ ،

طول محوره الأصغر يساوي ١ وزاوية ميل محوره الأكبر ٤٥ .

[ ٢ ] أوجد إحداثيات رؤوس وبؤر القطع المخروطي الذي معادلته .

$$٤س^2 - ٤س + ٦ص + ٦ = ٠$$

[ ٣ ] بإجراء دوران مناسب للمحاور ، أو انسحاب مناسب ، أو كليهما ، بيّن ماذا تمثل

كل من المعادلات الآتية ؟ :

( أ )  $١س^2 + ٢ص + ١ = ٠$  ( ب )  $٩س^2 - ٦س + ٩ص - ٩ = ٠$

( ج )  $٢س^2 + ٤س - ٦ص + ٢ = ٠$

## تمارين عامة

[ ١ ] أوجد إحداثيات البؤرة ومعادلة الدليل ثم ارسم القطع المكافئ في كل من الحالات التالية :

( أ )  $ص^2 = ١٠ س$  . ( ب )  $س^2 = ٨ ص$  .

( جـ )  $ص^2 = ٦ س$  . ( د )  $س^2 = ٥ ص$  .

[ ٢ ] أ ) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الشروط الآتية :

( أ ) البؤرة ( ٦ ، ٠ ) ، الدليل  $س = ٠$  .

( ب ) الدليل  $س + ص = ١$  ، البؤرة ( ٠ ، ١ - ) .

( جـ ) الرأس ( ٠ ، ٢ - ) ، البؤرة ( ٠ ، ٠ ) .

( د ) البؤرة ( ٠ ، ٢ ) ، الرأس ( ٠ ، ٤ ) .

[ ٣ ] أثبت أن النقطة ( ٢ ، ٣ ) تقع خارج القطع المكافئ  $ص^2 = ٣ س$  .

[ ٤ ] أوجد طولي المحورين ، إحداثيات الرأسين والبؤرتين والتخالف المركزي لكل من القطوع الناقصة الآتية :

( أ )  $٩ س^2 + ٢٥ ص^2 = ٢٢٥$  . ( ب )  $٤ س^2 + ٩ ص^2 = ١$  .

[ ٥ ] أوجد معادلة القطع الناقص الذي يحقق الشروط الآتية :

( أ ) البؤرتان ( ٠ ، ١ ± ) ، التخالف المركزي  $\frac{1}{٢}$  .

( ب ) البؤرتان ( ٠ ، ٢ ± ) ، التخالف المركزي  $\frac{1}{٢}$  .

[ ٦ ] أين تقع النقطة ( ٢ ، ٣ ) بالنسبة لكل من القطوع الناقصة التالية؟ :

( أ )  $٢ س^2 + ٣ ص^2 = ١$  . ( ب )  $\frac{س^2}{٩} + \frac{ص^2}{٣١} = ١$  .

( جـ )  $\frac{س^2}{١٦} + \frac{ص^2}{١٢} = ١$  .

[ ٧ ] أوجد معادلة القطع الناقص الذي محوره هما محورا الإحداثيات ، تخالفه المركزي ،

$$\sqrt{\frac{2}{5}} \text{ ويمر بالنقطة } (-3, 1) .$$

[ ٨ ] أوجد معادلة القطع الزائد الذي يحقق الشروط الآتية :

أ) البؤرتان  $(0, \pm 2)$  ، التخالف المركزي  $\frac{3}{4}$  .

ب) الرأسان  $(0, \pm 7)$  ، البؤرتان  $(0, \pm \frac{28}{3})$  .

ج) البؤرتان  $(0, 6)$  ،  $(0, -4)$  ، والتخالف المركزي ٣ .

[ ٩ ] أوجد معادلة القطع الزائد الذي تخالفه المركزي  $\sqrt{2}$  والمسافة بين بؤرتيه تساوي ١٦ .

[ ١٠ ] أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتيه  $(0, \pm 3)$  وطول محوره المرافق يساوي ٥ .

[ ١١ ] أوجد معادلة القطوع المخروطية الآتية :

أ) قطع مكافئ رأسه  $(-2, 3)$  وبؤرتيه  $(-2, 0)$  .

ب) قطع ناقص رأساه  $(3, 4)$  ،  $(-1, 4)$  وطرفا محوره الأصغر  $(1, 5)$  ،  $(1, 3)$  .

ج) قطع زائد بؤرتاه  $(-3, 5)$  ،  $(-3, 1)$  وتخالفه المركزي  $\frac{3}{4}$  .

[ ١٢ ] بإجراء انسحاب مناسب بين نوع المنحنى الذي تمثله كل من المعادلات التالية ثم

أوجد إحداثيات الرؤوس والبؤر :

أ)  $\frac{1}{8}x^2 - (y-6)^2 = 1$  .

ب)  $4x^2 + 9y^2 - 8x - 54y + 49 = 0$  .

ج)  $1 = \frac{(y+5)^2}{25} - \frac{(x-3)^2}{2}$  .

[١٣] بيّن نوع المنحنى الذي تمثله كل من المعادلات الآتية باستخدام الانسحاب أو الدوران أو كليهما :

أ)  $s^2 - s + ص = ٣$  .

ب)  $s^2 + ٢س + ص = ٣$  .

ج)  $٢س^2 + ص^2 - ٤س + ٨س + ٤٦ص - ٧١ = ٠$  .

## اختبار الوحدة

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

[١] أوجد معادلة القطع المكافئ إذا علمت أن بؤرته هي (٠ ، ٣) ومعادلة دليله هي  $ص = ٣ -$  .

[٢] أوجد طولي المحورين والتخالف المركزي للقطع الناقص الذي رأساه (٠ ، ٥ ±) وبؤرته (٠ ، ٤ ±) .

[٣] لديك معادلة القطع الزائد  $٤س^2 - ١٦ص^2 = ٦٤$  ، أوجد ما يلي :

أ) إحداثيات الرأسين والبؤرتين .

ب) معادلتى المستقيمين التقاربين والدليلين .

[٤] باستخدام دوران المحاور أو انسحابها أو كليهما ، بيّن ماذا تمثل كل من المعادلات الآتية :

أ)  $ص^2 + س + ص = ٠$  .

ب)  $٥س^2 - ٤س + ٢ص^2 = ٦$  .

### مراجعة

٤ - ١

[١] مثل بالرسم ما يلي :

(أ) مستويين متقاطعين في  $\vec{L}$  .

(ب) المستقيم  $\vec{L}$  يوازي المستوى  $\pi$  .

(ج) ثلاثة مستويات تتقاطع في المستقيم  $L$  .

(د) ثلاثة مستويات تتقاطع في ثلاثة مستقيمات متوازية .

[٢] أيُّ العبارات التالية صائبة وأيها خطأ؟ مع ذكر السبب .

(أ) أيُّ مستقيمين يعينان مستوى .

(ب) إذا وازى المستقيم  $\vec{L}$  المستوى  $\pi$  ، فإن  $\vec{L}$  يوازي جميع مستقيمات المستوى  $\pi$  .

(ج) أضلاع أيِّ شكل رباعي تقع في مستوى واحد .

[٣] أ ب ج د ، أ ب ج د ، صندوق جميع أوجهه مستطيلات .

(أ) أثبت أن :  $\overline{AB} //$  المستوى ( أ ب ج د ) .

(ب) أوجد الفصل المشترك لكلٍّ من أزواج المستويات التالية :

(١) ( أ ب ج د ) ، ( أ ب ج د ) . (٢) ( أ ب ج د ) ، ( أ ب ج د ) .

(٣) ( أ ب ج د ) ، ( أ ب ج د ) . (٤) ( أ ب ج د ) ، ( أ ب ج د ) .

### المستقيم العمودي على المستوى

٤ - ٢

[١] أ ب ج د مثلث قائم الزاوية في ب ، أقيم العمود  $\vec{A}$  على مستواه .

أثبت أن :  $|A| + |B| + |C| = |D|$  .

[٢]  $\pi$  ،  $\pi$  مستويان متقاطعان في  $\vec{L}$  والنقطة م غير واقعة في أيٍّ منهما . رَسِّم

$\overline{MB} \perp \pi$  ،  $\overline{MC} \perp \pi$  ورسم من ب عموداً  $\overline{B'D}$  على المستوى  $\pi$  .

أثبت أن :  $\overline{B'D} \perp \vec{L}$  .

[٣] أ ب ج د ، ب ج د ، متوازي مستطيلات ، لتكن س ، ص ، ع هي أبعاد المتوازي ، أثبت أن :  $|أ ج| = \sqrt{س^2 + ص^2 + ع^2}$  .

[٤] المستقيم  $\overleftrightarrow{أ ب}$  عمودياً على المستوى س عند النقطة ب ، فإذا كانت ح ، و نقطتان على س ، بحيث  $|أ ب| = ٩ سم$  ،  $|أ ح| = ٥ سم$  ،  $|أ ج| = ١٣ سم$  ، أوجد :  $|أ و|$  .

[٥] ب ج و مثلث قائم الزاوية في و ،  $\overline{أ و} \perp$  المستوى (ب ج و) .  
رسم من أ المستقيم  $\overleftrightarrow{أ م}$  موازياً للمستقيم  $\overleftrightarrow{و ج}$  .  
أثبت أن :  $\overleftrightarrow{أ م} \perp \overleftrightarrow{أ ب}$

[٦] أ ، ب ، ج ثلاث نقاط ليست على استقامه واحدة وتقع في المستوى س .  
م ، و نقطتان خارج المستوى س بحيث  $\overline{أ ب} \perp \overline{أ م}$  ،  $\overline{و ج} \perp \overline{أ ج}$  ،  $\overline{م ب} // \overline{و ج}$  .  
أثبت أن المستوى س عمودي على كل من  $\overline{م ب}$  ،  $\overline{و ج}$  .

## العمود المائل

٤ - ٣

[١] أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ،  $\overline{أ م} \perp$  المستوى (أ ب ج) ، و نقطة على  $\overline{أ ب}$  بحيث  $\overline{أ و} \perp \overline{أ م}$  أثبت أن  $\overline{أ و} \perp$  المستوى (م ب ج) .  
[٢] نصف قطر الدائرة (م) يساوي ٩ سم .  $|أ م| = ١٢ سم$  ،  $\overline{أ م} \perp$  الدائرة (م) لتكن ب نقطة على الدائرة ورسمنا منها مماساً  $\overline{أ ب}$  ج في مستوى الدائرة طوله ٢ سم .

أثبت أن :  $\overline{أ ب} \perp \overline{أ ج}$  ، ثم احسب  $|أ ج|$  .

[٣] أ ب ج و مستطيل ، يتقاطع قطراه في م ،  $\overline{و م}$  عمودياً على مستوى المستطيل ، أثبت أن :

$$|أ م| = |ب م| = |ج م| = |و م|$$

[٤] أثبت أنه إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على الفاصل المشترك للمستويين كان هذا المستقيم عمودياً على المستوى الآخر .

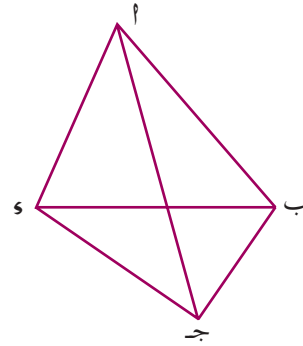
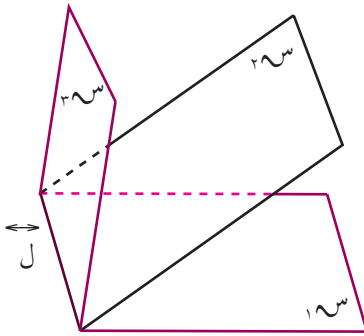


## الزاوية الزوجية

٤ - ٤

- [١]  $\angle$  ب ج د مثلث فيه  $\angle$  (١  $\times$ ) =  $45^\circ$ ،  $|\angle$  ب| =  $27^\circ$  سم ، رسم  $\overline{ب\omega}$  عمودياً على مستوى المثلث بحيث  $|\angle$  ب  $\omega$  =  $\frac{7}{3}$  سم ، رسمنا  $\overline{ب\mu}$  عمودياً على  $\overline{أ ج}$  عند م .  
احسب قياس الزاوية بين المستويين ( $\omega$  ج م) ، ( $\mu$  ب ج) .

[٢] سم كل الزوايا الزوجية في الشكلين التاليين :



- [٣] م مركز المربع  $\angle$  ب ج د ،  $\overline{م\omega} \perp$  المستوى ( $\angle$  ب ج د) ، ه منتصف  $\overline{أ ب}$  .  
أثبت أن: ه  $\overline{د\omega} \perp \overline{أ ب}$  ، وإذا كان  $|\angle$  ب  $\omega$  =  $|\angle$  م  $\omega$  .  
احسب قياس الزاوية بين  $\overline{د\omega}$  ومستوى المربع  $\angle$  ب ج د .

- [٤]  $\angle$  ب ج د مثلث قائم الزاوية في ب ،  $\overline{أ\omega}$  عمودياً على مستواه ،  $|\angle$  ب  $\omega$  =  $6^\circ$  سم ،  
 $|\angle$  ب| =  $45^\circ$  سم .  
احسب قياس الزاوية ( $\angle$  ب  $\omega$ ) .

## تمارين عامة

[ ١ ] ضع علامة (✓) أمام العبارة الصائبة وعلامة (X) أمام العبارة الخطأ ، مع ذكر السبب :

أ) نقول عن مستقيم أنه عمودي على مستوى  $\pi$  إذا كان عمودياً على مستقيمين متوازيين في  $\pi$  .

ب) المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر .

ج) المستوى العمودي على أحد مستويين متوازيين عمودي على الآخر .

د) المستويان العموديان على مستوى ثالث متوازيان .

هـ) من نقطة خارج مستوى لا يمكن رسم سوى مستوى واحد عمودي عليه .

و) المستقيمان العموديان على مستقيم ثالث متوازيان .

ز) الزاوية الخطية هي كل زاوية مرسومة في وجهي الثنائية .

[ ٢ ] أكمل العبارات التالية :

أ) المستويان العموديان على مستقيم واحد -----

ب) المستقيمان العموديان على مستوى واحد -----

ج) يتعامد مستويان إذا كانت زاويتهم الزوجية -----

د) إذا كان  $\vec{a} \perp \vec{b}$  ،  $\vec{a} \parallel \vec{c}$  ، فإن -----

[ ٣ ] ب ج د مثلث متساوي الساقين ، فيه  $|ب ج| = |ب د| = ٥$  سم .

$|ج د| = ٨$  سم ، أقيم من ب عموداً  $\overline{ب هـ}$  على مستوى المثلث ب ج د

بحيث  $|ب هـ| = ٣$  سم .

أ) أثبت أن المستويين (هـ ب ج) ، ( ب ج د) متعامدان .

ب) إذا كان  $\vec{و}$  منتصف  $\overline{ج د}$  فأوجد طول  $\overline{ب و}$  .

ج) احسب قياس الزاوية الزوجية للمستويين (ب ج د) ، (هـ ج د) .

[٤]  $\overline{أب} \perp \overline{جـ د}$  هرم ثلاثي فيه  $|\overline{أب}| = |\overline{جـ د}|$  ،  $|\overline{أز}| = |\overline{جـ د}|$  ،  
هـ منتصف  $\overline{جـ د}$  .

أثبت أن المستوى  $(أ ب هـ) \perp$  المستوى  $(ب ج د)$  .

[٥]  $\overline{أب} \perp \overline{جـ د}$  هـ رباعي غير مستوي ؛ فإذا كانت ل ، م ، ن ، و ، منتصفات الحروف  $\overline{أ ب}$  ،  
 $\overline{جـ د}$  ،  $\overline{هـ ز}$  ،  $\overline{ب هـ}$  ، على الترتيب .

أ) أثبت أن الشكل ل م ن و متوازي اضلاع .

ب) إذا كان  $\overline{أ هـ} \perp$  المستوى  $(ب ج د)$  ، أثبت أن  $\overline{و هـ} \perp$  (م و ل م) = ٩٠° .

[٦]  $\overline{أ ب}$  قطر في دائرة ، أقيم من أ العمود  $\overline{أ جـ}$  على مستوى الدائرة ، و نقطة على  
الدائرة . أثبت أن المستوى  $(أ جـ د) \perp$  المستوى  $(جـ و ب)$  .

[٧] (م) دائرة في المستوى س هـ قطرها  $\overline{ب جـ}$  . أقيم من ب العمودي  $\overline{ب د}$  على  
المستوى س هـ .

أ) برهن أن المستويين  $(و ب د)$  ،  $(جـ و د)$  متعامدان حيث و نقطة على الدائرة م .

ب) نرسم من ب المستوى ص هـ العمودي على  $\overline{أ د}$  فيلاقيه في نقطة س ويلاقى  
 $\overline{د جـ}$  في النقطة ص برهن أن :  $\overline{س ص} \parallel \overline{أ جـ}$  .

[٨]  $\overline{أ ب}$  جـ مثلث ، فيه  $|\overline{أ ب}| = |\overline{أ جـ}| = |\overline{ب جـ}|$  ،  $|\overline{أ ب}| = |\overline{أ جـ}|$  ،  $|\overline{أ ب}| = |\overline{ب جـ}|$  . أقيم العمودي  $\overline{أ و}$  على  
مستوى المثلث  $\overline{أ ب جـ}$  بحيث كان  $|\overline{أ و}| = \sqrt{٤٣}$  سم ، و  $\overline{و ب}$  ،  $\overline{و جـ}$  .  
أثبت أن قياس الزاوية بين المستويين  $(أ ب جـ)$  ،  $(و ب جـ)$  تساوي ٦٠° .

[٩] ب جد مثلث ، فيه  $\sphericalangle (و ب ج) = ٤٥^\circ$  ،  $|ب ج| = ٢٠$  سم . أقيم  $\overline{جأ}$  عمودياً على مستوى المثلث (ب ج و) ،  $|جأ| = ٥$  سم ، رُسم العمود  $\overline{أه}$  على  $\overline{ب و}$  .  
(أ) أوجد طول  $\overline{أه}$  .

(ب) أوجد جيب الزاوية الخطية للمستويين (و ب ج) ، (أ ب و) .

[١٠] أ ب ج و مثلث ، فيه  $\sphericalangle (أ ب ج) = ٣٠^\circ$  ،  $|أ ج| = ١٠$  سم ،  $|ج و| \perp$  المستوى (أ ب ج) ،  $|ج و| = ١٢$  سم ،  $\overline{و ه} \perp \overline{أ ب}$  .  
(أ) أوجد طول  $\overline{و ه}$  .  
(ب) احسب مساحة  $\Delta و ج ه$  .

[١١] أ ب ج و مستطيل ، فيه  $|أ ب| = ٦$  سم ،  $|أ ج| = ٨$  سم ، م نقطة تقاطع قطريه ، رُسم  $\overline{م د}$  عمودياً على مستوى المستطيل بحيث كان :  
 $|م د| = ١٢$  سم ، احسب  $|د أ|$  .

[١٢] س ص ع مثلث حاد الزوايا ، فيه  $\sphericalangle (س ص ع) = ٣٠^\circ$  ،  $|س ص| = ٦$  سم ،  $\overline{ص أ} \perp$  مستوى المثلث س ص ع ،  $\overline{ص ب} \perp \overline{س ع}$  ،  $|أ ص| = ٤$  سم .  
(أ) أوجد  $|ب ص|$  ،  $|أ ب|$  .  
(ب) أثبت أن :  $\overline{أ ب} \perp \overline{س ع}$  . (ج) احسب مساحة  $\Delta أ ب ص$  .  
(د) أوجد ظل الزاوية بين المستويين (س ص ع) ، (أ س ع) .

[١٣] دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٦ سم ، رُسم  $\overline{م د}$  عمودياً على مستوى الدائرة بحيث كان  $|م د| = ٨$  سم ، أ نقطة على محيط الدائرة . أوجد  $|د أ|$  .

[١٤] لتكن م مركز المربع أ ب ج د ، د نقطة خارج مستواه بحيث كان :

$$|م د| = |م ب| ، المثلث ب م د متساوي الأضلاع . أثبت أن :$$

$$(أ) \quad \overline{م د} \perp \overline{م ب} . \quad (ب) \quad \overline{م د} \perp \text{المستوى } (أ ب ج د) .$$

[١٥] أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، أقيم من أ العمود آ و على مستوى المثلث أ ب ج

فإذا كانت س ، ص ، ع ، ل منتصفات الأضلاع آ ب ، و ب ، أ ج ، و ج د على الترتيب .

أولاً : أثبت أن ( أ ) الشكل ص س ع ل متوازي أضلاع .

$$(ب) \quad \Delta \text{ و ب ج قائم الزاوية في ب .}$$

ثانياً : حدد الزاوية الخطية للمستويين ( أ ب ج د ) ، ( و ب ج د ) .

[١٦] ب ج د مثلث قائم الزاوية في ب ، و هـ ( س و ) = ٣٠° ، رُسم ب أ ⊥ مستوى

$$\text{المثلث ب ج د ، بحيث كان } |أ ب| = \frac{1}{\sqrt{2}} |ب ج| .$$

أثبت أن المستويين ( أ ب ج د ) ، ( و ب ج د ) عموديان على المستوى ( ب ج د ) .

$$[١٧] \text{ رسم في المستوى الإحداثي القطع الناقص الذي معادلته } ١ = \frac{ص^2}{٢} + \frac{س^2}{٢} \text{}$$

( حيث ب < ج ) ، يقطع محور الصادات في ١ ، ١ ، ويقطع محور السينات في

$$س ، س ، رسم س ص ⊥ المستوى الإحداثي ، فإذا كان |س ص| = \sqrt{٣} .$$

( أ ) أثبت أن المستويين ( ص س و ) ، ( س أ و ) متعامدان ، حيث و ( ٠ ، ٠ ) .

( ب ) أوجد قياس الزاوية الخطية للمستويين ( ص أ و ) ، ( س أ و ) .

## اختبار الوحدة

[١] أكمل العبارات التالية :

- (أ) المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عمودياً على -----  
 (ب) المستويان العموديان على مستقيم واحد -----  
 [٢] ضع علامة (✓) أمام العبارة الصائبة وعلامة (X) أمام العبارة الخطأ ، مع ذكر السبب .

- (أ) يتعامد مستويان إذا كانت زاويتيهم الخطية قائمة .  
 (ب) الزاوية الخطية هي كل زاوية مرسومة في وجهي الثنائية .  
 [٣] أثبت أن المستوى العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر .  
 [٤] ب ج و مثلث فيه  $|ب ج| = |ب و| = |ج و|$  ،  $|ج و| = ٨$  سم . أقيم من ب العمود  $\overline{ب هـ}$  على مستوى المثلث ب ج و بحيث كان  $|ب هـ| = ٣$  سم :

- (أ) أثبت أن المستويين ( هـ ب ج ) ، ( ب ج و ) متعامدان .  
 (ب) إذا كانت و منتصف  $\overline{ح و}$  ، فأوجد  $|ب و|$  .  
 (ج) احسب قياس الزاوية الخطية للمستويين ( ب ج و ) ، ( هـ ج و ) .  
 [٥]  $\overline{أ ب} \perp س هـ$  ،  $\overline{أ ب} \cap س هـ = \{ و \}$  وكان  $\{ ج هـ \} \supset س هـ$  ، بحيث أن  $|أ و| : |أ ج| = ١ : ٢$  ،  $\overline{هـ ج} \perp \overline{و ج}$  .

- (أ) أثبت أن :  $|أ و| : |أ ج| = ١ : ٣$  .  
 (ب) أثبت أن المستويين ( و ج هـ ) ، ( و ج د ) متعامدان .  
 (ج) أثبت أن  $\angle (أ ج و)$  هي الزاوية الخطية بين المستويين ( و ج هـ ) ، س هـ .  
 ثم احسب قياسها .

### مبرهنات أساسية في الاحتمال

٥ - ١

[ ١ ] أُلقي حجران نرد متجانسان عشوائياً إلى الأرض. ولتكن  $A$  هي حادثة الحصول على عدد زوجي من الحجر الأول ،  $B$  هي حادثة الحصول على عدد أكبر من ٣ من الحجر الآخر ، احسب :

( أ )  $P(A)$  ( ب )  $P(B)$  ( جـ )  $P(A \cap B)$  ( د )  $P(A \cup B)$

[ ٢ ] إذا كان  $P(A) = \frac{1}{4}$  ،  $P(B) = \frac{3}{8}$  ،  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$  ؛ أوجد :

( ١ )  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$  ( ٢ )  $P(\bar{A} \cap B)$  ( ٣ )  $P(A \cap \bar{B})$

[ ٣ ] إذا كان احتمال أن يستلم عامل مقسم الهاتف ٥ مكالمات على الأكثر خلال الساعة الأولى من الدوام الرسمي هو ٠,٢ ، واحتمال أن يستلم في تلك الساعة ٩ مكالمات على الأقل هو ٠,٥ . فما هو احتمال أن يستلم في تلك الساعة ٦ أو ٧ أو ٨ مكالمات ؟

### بناء النموذج الاحتمالي

٥ - ٢

[ ١ ] أُلقيت قطعة نقود متجانسة ٣ مرات متتالية عشوائياً :

( ١ ) ما هو احتمال ظهور صورتين على الأكثر ؟

( ٢ ) ما هو احتمال ظهور كتابة واحدة على الأقل ؟

[ ٢ ] سحبت ورقة عشوائياً من بين مجموعة أوراق اللعب العادي وعددها ٥٢ ورقة ، احسب احتمال أن تكون الورقة المسحوبة :

( أ ) صورة . ( ب ) تحمل صورة الولد .

( جـ ) حمراء .

- [٣] ألقى حجرًا نرد متميزًا إلى الأرض مرة واحدة عشوائيًا. احسب احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين :
- (أ) ١٠ . (ب) ١٠ أو أكبر . (ج) أصغر من ١٠ .

### الاحتمال الشرطي وقانون الضرب والحوادث المستقلة

٣ - ٥

- [١] أوجد ح (ب | أ) إذا كان :
- (١)  $P(A) = 0.3$  ،  $P(B) = 0.4$  ،  $P(A \cap B) = 0.1$  ، ب حادثتين متنافيتين .
- [٢] صندوق يحتوي على ٧ كرات حمراوات ، ٣ كرات بيضاوات سحب منه ٣ كرات عشوائياً واحدة تلو الأخرى . فما هو احتمال أن تكون الكرتان الأولى والثانية حمراوين والثالثة بيضاء ؟
- [٣] تنتج ٣ ماكينات ١ ، ب ، ج بالتوالي ٥٠٪ ، ٣٠٪ ، ٢٠٪ من الإنتاج الكلي لمصنع وإذا كان نسبة الإنتاج غير السليم لهذه المكينات هي على الترتيب ٣٪ ، ٤٪ ، ٥٪ إذا اختيرت وحدة عشوائياً من إنتاج هذه المكينات ماهو احتمال أن تكون الوحدة المختارة غير سليمة ؟

### متتاليات التكرارات المستقلة وقانون الاحتمال الثنائي

٤ - ٥

- [١] إذا كانت س تعبر عن عدد الصور في رمية واحدة لأربع عملات متجانسة أوجد : (١) ح (س = ٢) . (٢) ح (س = ٣) .
- [٢] ألقى حجر نرد متجانس عشوائياً ٥ مرات متتالية فما هو احتمال كل من الحوادث التالية :
- (أ) عدم ظهور الرقم ٣ إطلاقاً . (ب) ظهور الرقم ٣ مرة واحدة .
- (ج) ظهور الرقم ٣ ثلاث مرات .
- [٣] من بين العائلات التي لها ٤ أطفال . اختيرت إحدى العائلات بشكل عشوائي ، فما هو احتمال أن يكون لدى هذه العائلة :
- (١) ولد على الأقل ؟
- (٢) ولدان وبنتان ؟



## السحب مع الإعادة وبدون إعادة

٥ - ٥

[ ١ ] أنتجت آلة في مصنع ٢٠ قطعة فوجد أن ١٢ قطعة منها موافقة للطول المطلوب،  
٥ قطع أكبر من الطول المطلوب ، ٣ قطع أصغر من الطول المطلوب ، سُحبت  
قطعتان عشوائياً مع الإعادة من هذا الإنتاج . احسب احتمال أن تكون القطعتان  
المسحوبتان :

أ) موافقتين للطول .

ب) غير موافقتين للطول .

ج) أكبر من الطول المطلوب .

د ) القطعة الأولى موافقة للطول والثانية أكبر من الطول المطلوب .

هـ) واحدة أكبر من الطول المطلوب والأخرى أصغر من الطول المطلوب .

[ ٢ ] صندوق يحتوي على ٢٤ صمّاماً لحاسب آلي، من بينها ٥ صمامات غير  
سليمة سُحبت عيّنة عشوائية من ٤ صمامات بدون إعادة . أوجد احتمال  
الحوادث التالية :

١ ) أن تكون العيّنة المسحوبة كلّها سليمة .

٢ ) أن يكون فقط صمّام واحد غير سليم .

## تمارين عامة

- [١] إذا كان  $P = 0.2$  ،  $P(B) = 0.4$  ،  $P(A \cup B) = 0.5$  أوجد :
- حـا  $P(B)$  ، حـا  $P(A \cap B)$  ، حـا  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$  ، حـا  $P(A \cup \bar{B})$  .
- [٢] لتكن حـا  $P(A/B) = 0.6$  ، حـا  $P(B) = 0.2$  ، حـا  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.5$  ، أوجد : حـا  $P(A)$  ، حـا  $P(\bar{A} \cap B)$  ، حـا  $P(A/B)$  ، حـا  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$  .
- [٣] أوجد حـا  $P(A/B)$  ، حـا  $P(A \cap B)$  ، عندما  $A \supset B$  .
- [٤] لتكن  $A$  ،  $B \supset A$  ،  $P(A \cup B) = 0.7$  ، حـا  $P(B) = 0.2$  ، حـا  $P(A) = 0.5$  .
- أوجد : (١) حـا  $P(A \cap B)$  (٢) حـا  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$  (٣) حـا  $P(A/B)$  .
- [٥] أُلقيت قطعتا نرد مختلفتان عشوائياً على الأرض ، فكان لدينا الحادثتان :
- الحادثه  $A$  هي الحصول على عدد فردي من القطعة الأولى .
- الحادثه  $B$  هي الحصول على عدد أكبر من ٢ من القطعة الثانية :
- احسب : حـا  $P(A)$  ، حـا  $P(B)$  ، حـا  $P(A \cap B)$  .
- [٦] إذا كان  $A$  ،  $B$  حادثتين مستقلتين ، أثبت أن :  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  .
- [٧] إذا كان احتمال أن يبيع معرض سيارات في شهر معين ٣ سيارات على الأقل هو ٠.٢ ؛ ماهو احتمال أن يبيع في ذلك الشهر سيارة واحدة ، أو سيارتين أو لايبيع شيئاً ؟
- [٨] لدينا صندوقان يحتوي الأول على ٣ كرات بيضاوات ، ٥ كرات سوداوات ويحتوي الأخرى على ٥ كرات سوداوات و ٣ كرات بيضاوات . سُحبت كرتان عشوائياً مع الإعادة من الصندوق الأول وكرتان بدون إعادة من الصندوق الثاني . احسب احتمال الحصول على :
- (١) ٤ كرات بيضاء .
- (٢) كرة سوداء واحدة على الأقل .

[٩] صندوقان الأول به ٨ مصابيح من بينها ٣ مصابيح غير سليمة والآخر به ٥ مصابيح من بينها اثنان غير سليمين . أختير - عشوائياً - مصباح واحد من كل صندوق ، وإذا افترضنا أننا اخترنا مصباحاً سليماً ، ومصباحاً غير سليم . فما احتمال أن يكون المصباح غير السليم من الصندوق الأول ؟

[١٠] إذا كان احتمال فوز فريق « ١ » هو ٠.٦ ، واحتمال هزيمته هو ٠.٣ ، واحتمال تعادله هو ٠.١ ، إذا لعب « ١ » ٣ مباريات مع فريق آخر ، ما احتمال فوز « ١ » مرتين على الأقل وعدم هزيمته ؟

[١١] صندوق يحتوي على ٣ قطع من النقود فإذا كانت القطعة الأولى عادية والقطعة الثانية ذات صورتين والقطعة الثالثة فيها احتمال الكتابه يساوى ضعف احتمال الصورة سحبت قطعة من الصندوق عشوائياً ، ثم أُلقيت إلى الأرض . فما احتمال ظهر صورة ؟

[١٢] أُلقيت قطعنا نقود متجانستان عشوائياً ، وتمت ملاحظة الوجهين الظاهرين لهما عند استقرارهما على الأرض .

( ١ ) كَوْن نموذجاً احتمالياً مناسباً لهذه التجربة .

( ٢ ) أوجد احتمال الحصول على الوجه :

أ ( ص مرة واحدة على الأقل .

ب ( ك من القطعة الثانية .

ج ( ك مرة واحدة .

د ( ص مرة واحدة على الأكثر .

[١٣] برهن أن  $(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = (A \cap B \cap C)$  .

[١٤] صندوق يحتوي على ٦ كرات بيضاوات، ٥ كرات سوداوات، سُحبت جميع هذه الكرات عشوائياً واحدة تلو الأخرى بدون إعادة فما هو احتمال أن تكون الأولى بيضاء والثانية سوداء والثالثة بيضاء والرابعة سوداء وهكذا على التناوب؟

[ ١٥ ] صندوق يحتوي على ١٥ ورقه مرقمه من ١ إلى ١٥ ، سُحبت منه ورقة عشوائياً  
فما احتمال أن يكون :

( ١ ) الرقم المسحوب « ٥ » ؟

( ٢ ) الرقم المسحوب يقبل القسمه على « ٣ » ؟

[ ١٦ ] إذا كان احتمال أن يعيش رجل ١٠ سنوات أخرى هو  $\frac{1}{4}$  واحتمال أن تعيش

زوجته ١٠ سنوات أخرى هو  $\frac{1}{3}$  . أوجد احتمال أن :

( ١ ) يعيش الاثنان ١٠ سنوات أخرى .

( ٢ ) يعيش أحدهما على الأقل ١٠ سنوات أخرى .

( ٣ ) يموت الاثنان خلال السنوات العشر الأخرى .

( ٤ ) تعيش الزوجة ١٠ سنوات أخرى .

[ ١٧ ] صندوق يحتوي على ٢٤ صمّاماً لحاسب آلي منها ٥ صمّامات غير سليمة،

سُحبت عيّنة من ٤ صمّامات بدون إعادة . أوجد احتمال الحوادث التالية :

( أ ) ألا تتضمن العيّنة صمّامات غير سليمة .

( ب ) العيّنة كلها غير سليمة .

( جـ ) نصف العيّنة غير سليمة .

( د ) قطعة واحدة غير سليمة .

[ ١٨ ] صندوق به ٣ كرات حمراوات ، ٧ كرات بيضاوات ، سُحبت كرة عشوائياً من

الصندوق وأضيفت كرة من اللون المخالف للكرة المسحوبة ، ثم سُحبت بعد ذلك

عشوائياً كرة أخرى من الصندوق . لتكن الكرتان المسحوبتان من اللون نفسه

فما هو احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأبيض ؟

[ ١٩ ] سُحبت بطاقتان عشوائياً من بين ٤٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٤٠ . ماهو احتمال

أن يكون مجموع العددين على البطاقتين المسحوبتين فردياً :

( ١ ) إذا سُحبت البطاقتان واحدة تلو الأخرى مع الإعادة ؟

( ٢ ) إذا سُحبت البطاقتان واحدة تلو الأخرى بدون إعادة ؟

[٢٠] إذا كان لدينا ثلاثة صناديق يحتوي الأول على ١٠ مصابيح من بينها ٤ غير سليمة ، ويحتوي الثاني على ٦ مصابيح من بينها مصباح واحد غير سليم ، ويحتوي الثالث على ٨ مصابيح من بينها ٣ غير سليمة . اختير صندوق عشوائياً وسحب منه مصباح بطريقة عشوائية أيضاً . فما هو احتمال أن يكون المصباح غير سليم ؟

[٢١] إذا استخدمت أرقام المجموعة  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  في كتابة عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة . احسب احتمال أن يكون :

(١) العدد فردياً .

(٢) العدد زوجياً .

(٣) العدد يقبل القسمة على ٥ .

[٢٢] احتمال أن يبقى رجل على قيد الحياة ٢٥ سنة أخرى هو  $\frac{3}{5}$  ، واحتمال أن

تبقى زوجته على قيد الحياة ٢٥ سنة أخرى هو  $\frac{2}{3}$  ، فما احتمال :

(١) أن يبقى الاثنان على قيد الحياة ٢٥ سنة أخرى ؟

(٢) أن يبقى الرجل فقط على قيد الحياة ٢٥ سنة أخرى ؟

(٣) أن تبقى الزوجة فقط على قيد الحياة ٢٥ سنة أخرى ؟

(٤) أن يبقى واحد منهما على قيد الحياة ٢٥ سنة أخرى ؟

[٢٣] وُجد من بين ١٠ طلاب ٣ طلاب يلبسون نظارات . اختير طالبان من بينهم

عشوائياً . أوجد احتمال الحوادث التالية :

(١) أن يكون الطالبان يلبسان نظارة .

(٢) أن يكون الطالبان لا يلبسان نظارة .

(٣) أن يكون طالب واحد على الأقل يلبس نظارة .

## اختبار الوحدة

[١] لتكن  $A$ ،  $B$  حادثتين، وكان  $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ ،  $P(A) = 0.1$ ،

ح  $P(\bar{A}) = \frac{1}{5}$ ، فأوجد :

(١) ح  $P(A)$  (٢) ح  $P(B)$  (٣) ح  $P(\bar{A} \cap B)$  (٤) ح  $P(A \cap \bar{B})$  .

[٢] سحب رجل ٤ ورقات عشوائياً من بين ٥٢ ورقة لعب عادي، فصادف أن وجد جميع الأوراق الأربع المسحوبة من النوع الأسود «قلب» فقام بسحب ٣ ورقات إضافية أخرى . فما هو احتمال أن تكون ورقة واحدة على الأقل من الثلاث الورق المسحوبة الإضافية من النوع الأسود «قلب» أيضاً ؟

[٣] صندوقان يحتوي الأول على ٨ ورق مرقمة من ١ إلى ٨ ، ويحتوي الثاني على ٥ ورق مرقمة من ١ إلى ٥ . اختير صندوق – عشوائياً – وسُحبت منه ورقة عشوائياً . إذا كان رقم الورقة المسحوبة زوجياً ، فما احتمال أن تكون الورقة المسحوبة من الصندوق الأول ؟

[٤] سُحبت ٣ مصابيح كهربائية عشوائياً من بين ١٥ مصباحاً ، بينها ٥ مصابيح غير سليمة . فما احتمال أن تكون :

(١) جميع المصابيح الثلاثة المسحوبة سليمة .

(٢) واحد على الأقل غير سليم .

[٥] سُحبت ورقتان عشوائياً من بين أوراق اللعب العادي المكونة ٥٢ ورقة، فما احتمال أن تكون الورقتان المسحوبتان من نوع « ولد » ؟:

(١) مع الإعادة . (٢) بدون إعادة .

### المشتقات

٦ - ١

[ ١ ] أوجد قيمة د ( ٣ ) للدوال الآتية :

$$\begin{aligned}
 (١) \quad & \frac{s}{(1-s)^2} = (s) \quad (٢) \quad (٢-s)^3 = (s) \quad (٣) \quad \frac{|s|}{s} = (s) \quad (٤) \quad \frac{s^2 - s + 2}{s^5 + s + 1} = (s) \quad (٥) \quad \frac{\sqrt{s} + 1}{\sqrt{s} - 1} = (s) \quad (٦) \quad s^3(s^2 + 3)(s^4 + 1) = (s) \quad (٧) \quad \sqrt[4]{s+1} = (s)
 \end{aligned}$$

[ ٢ ] أوجد المشتقة الثالثة لكل من الدوال الآتية عند  $s = ٢$  :

$$\begin{aligned}
 (١) \quad & \sqrt{s} = (s) \quad (٢) \quad 6 + s^5 - s^4 = (s) \quad (٣) \quad (s^3 + s^2)(s) = (s) \quad (٤) \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{\sqrt{s}} + 2 = (s) \quad (٥) \quad \left. \begin{aligned} & s^2 + 1 \leq s \\ & s^4 + 1 > s \end{aligned} \right\} = (s)
 \end{aligned}$$

[ ٣ ] يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة :

$$f(t) = \frac{t^3}{12} + \frac{t}{4}$$

أوجد :

- أ ( سرعة هذا الجسيم عند  $t = ٥$  ثواني .  
 ب ( تسارع الجسيم عند  $t = ٥$  ثواني .

[ ٤ ] أوجد المشتقة النونية لكل من الدوال التالية :

$$(١) \text{ ص } \sqrt{s} \quad (٢) \text{ ص } \frac{1}{s+3}$$

$$(٣) \text{ ص } \frac{1}{s^2 - 6s + 9}$$

$$[٥] \text{ لتكن د (س) = } \left. \begin{array}{l} s^2 + 1, \quad s < 1 \\ s^3, \quad s \geq 1 \end{array} \right\}$$

أوجد - إن أمكن - كل من : د'(١) ، د'(-١) ، د'(٤) .

[ ٦ ] أوجد معادلتى المماس والناظم لمنحنى الدالة : د (س) =  $s^2 - 2s^2 + 3$  عند النقطة ( ٢ ، ٣ ) .

### مشتقة تركيب دالتين (قاعدة التسلسل)

٦ - ٢

[ ١ ] باستخدام قاعدة التسلسل ، أوجد مشتقات الدوال الآتية :

$$(١) \text{ ص } (3 + \sqrt{s})^{10} \quad (٢) \text{ ص } (s^2 + 2)^0 (3 + s^4)^2$$

$$(٣) \text{ ف } \left( \frac{1 + s^2}{5 - s^2} \right)^4 \quad (٤) \text{ ص } \frac{\sqrt{1 - s^2}}{s}$$

$$(٥) \text{ ص } \frac{1}{s^2 (s+1)} \quad (٦) \text{ ص } (2s^2 - 3s + 4)^{10}$$

$$(٧) \text{ ص } \sqrt[3]{s+4} - 4\sqrt{s}$$

[ ٢ ] أوجد (و ع) (س) لكل من الدوال التالية :

$$(١) \text{ و (ع) = } 3 - 2\text{ع} , \quad \text{ع (س) = } s^2 + 2$$



$$(2) \quad (ع) \quad \frac{ع}{1-ع} = (ع) \quad ، \quad ع(س) = س^3 - س^2 + 1$$

$$(3) \quad (ع) \quad 5 - ع^3 = ل \quad ، \quad ع(س) = (س)(1 - س^2)(3 + س^7) .$$

[3] أوجد قيمة  $\frac{ص}{س}$  للدوال التالية :

$$(1) \quad ص(س) = (س^3 - 4س^2 + 4س - 1)^{16} \quad (2) \quad ص(س) = \frac{1}{3}(4 - 2س^2)$$

$$(3) \quad ص(س) = 3ع^2 + 2 \quad ، \quad ع = \frac{5}{س}$$

[4] أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة  $د(س) = (س)(1 - 2س^2)$  عند  $س = -1$  .

[5] إذا كانت  $(س) \quad (س) = 3س + |س|$  ،  $هـ(س) = \begin{cases} س & س > 0 \\ س^2 & س \leq 0 \end{cases}$  فأوجد  $هـ'(2)$  .

### مشتقة الدالة اللوغاريتمية والأسية

٦ - ٣

[1] أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

$$(1) \quad ص = لو(2س + 3) \quad (2) \quad د(س) = س^2 لو 3س .$$

$$(3) \quad ص = لو\left(\frac{2 + س^2}{3 + س^2}\right) \quad (4) \quad ص = لو(س^2 + 2)(1 - س^3)^4$$

$$(5) \quad لو ص = لو س^3 \quad (6) \quad ص = لو(2 + \sqrt{س}) - 2 - \frac{1}{س}$$

$$(7) \quad ص = \frac{لو\sqrt{1+س}}{3+س}$$

[2] أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية :

$$(1) \quad د(س) = س(10)^س \quad (2) \quad ص = هـ(س^2)$$

$$\frac{س}{س+١} = د (س) \quad (٤)$$

$$لو \sqrt{س} = د (س) = هـ \quad (٣)$$

$$\sqrt{١-س^٢} = ص \quad (٦)$$

$$٦ + \sqrt{س} = ص \quad (٥)$$

[٣] إذا كانت ص = لو س ، فأثبت أن :

$$ص - س - ص - س - ص = ٠$$

[٤] أوجد المشتقة النونية للدالة : د (س) = ب س

## نهايات واتصال الدوال المثلثية

٦ - ٤

[١] احسب النهايات التالية عندما يسعى متغيرها نحو القيمة المرافقة ، علماً بأنه مقدراً بالراديان :

$$(١) \frac{جا٣ س}{س} ، س \leftarrow ٠ \quad (٢) \frac{١-جتا س}{س} ، س \leftarrow ٠$$

$$(٣) \frac{جا٢ س}{جا٣ س} ، س \leftarrow ٠ \quad (٤) \frac{٣ ظا٢ س}{س} ، س \leftarrow ٠$$

$$(٥) \frac{جتا٣ س - جتا٥ س}{س^٢} ، س \leftarrow ٠ \quad (٦) \frac{جا٤ س - جا٢ س}{س^٢ - ٢} ، س \leftarrow ٠$$

$$(٧) (س + ٥) قتا (س + ٥) ، س \leftarrow ٥$$

$$(٨) \frac{٢ جا س - ١}{٤ جتا س - ٣} ، س \leftarrow \frac{\pi}{٦}$$

$$(٩) \frac{س - ظا٢ س}{س + ظا٤ س} ، س \leftarrow ٠ \quad (١٠) (١ - س) ظا \frac{\pi}{٢} س ، س \leftarrow ١$$

[ ٢ ] ادرس اتصال كل من الدوال التالية عند القيم المرافقة ، وإذا كانت الدالة غير متصلة أعد تعريفها - إن أمكن - لكي تكون متصلة :

$$(١) د(س) = \frac{\text{جتا س}}{\pi - س} ، س \leftarrow \frac{\pi}{٢}$$

$$(٢) د(س) = \text{ظتا س} ، س \leftarrow \frac{\pi}{٢}$$

$$(٣) د(س) = \left. \begin{array}{l} \text{جتا س} - ١ \\ \frac{١}{٢} \end{array} \right\} ، \begin{array}{l} س \neq ٠ \\ س = ٠ \end{array} \quad \text{عند } س = ٠$$

$$[ ٣ ] \text{ إذا علمت أن الدالة } د(س) = \left. \begin{array}{l} \frac{\text{جا } ٦ س - \text{ظا } ١ س}{س} \\ س^٣ + ١ \end{array} \right\} ، \begin{array}{l} س < ٠ \\ س \geq ٠ \end{array}$$

أوجد قيمة ١ التي تجعل الدالة متصلة عند  $س = ٠$

$$[ ٤ ] \text{ إذا كانت } د(س) = \left. \begin{array}{l} \frac{\text{ظا } ٣ س}{\text{جا } ٢ س} \\ ١ \end{array} \right\} ، \begin{array}{l} س \neq ٠ \\ س = ٠ \end{array}$$

فأوجد قيمة ١ التي تجعل الدالة متصلة عند  $س = ٠$

$$[ ٥ ] \text{ إذا كانت } د(س) = \left. \begin{array}{l} \frac{\text{جا } (\text{ظا } ٢ س)}{س} \\ ب \end{array} \right\} ، \begin{array}{l} س \neq ٠ \\ س = ٠ \end{array}$$

فأوجد قيمة ب التي تجعل الدالة متصلة عند  $س = ٠$

# مشتقة الدوال المثلثية

٥ - ٦

[ ١ ] أوجد ما يأتي :

$$(أ) \frac{s}{s} \text{ (جتا } \frac{s}{p} \text{ ) } (ب) \frac{s}{s} \text{ (جا } ٢ \text{ س ) }$$

$$(ج) \frac{s}{s} \text{ (قا س ) }$$

[ ٢ ] أوجد  $\frac{s^2 \text{ ص}}{s^2}$  لكل من الدوال التالية :

$$(١) \text{ ص} = \frac{\text{جا س} + ١}{\text{س}} \quad (٢) \text{ ص} = \text{ظا}^٢ \text{ س} + \sqrt{\text{قا س}}$$

$$(٣) \text{ ص} = \text{قتا}^٢ \text{ س} + \frac{١}{٢} + \text{هـ ظناس} \quad (٤) \text{ ص} = \text{لو} \sqrt{\text{ظا}^٢ \text{ س} + ٢} .$$

[ ٣ ] أوجد أصغر عدد صحيح موجب  $\phi$  يحقق المساواة :

$$\frac{s^3}{s^3} = (\text{جتا س}) = \text{جتا س} .$$

[ ٤ ] أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

$$(١) \text{ ص} = \text{جا}^٣ \text{ س جتا}^٣ \text{ س}$$

$$(٢) \text{ ص} = \frac{١ + \text{جتا}^٢ \text{ س}}{\text{جا}^٢ \text{ س} - ١}$$

[ ٥ ] إذا كانت  $\text{ص} = \text{س جتا}^٣ \text{ س}$  ، فأثبت أن :

$$\text{س ص} + ٩ \text{ س ص} + ١٨ \text{ ص} = ٠$$

## مشتقة الدالة الضمنية

٦ - ٦

[ ١ ] أوجد  $\frac{ds}{s}$  لكل من الدوال الآتية :

(أ)  $3s^2 - 2s + 5 = 2s^2 + 6s$

(ب)  $4 = 2s^2 + s$

(ج)  $s^2 \text{ جا } 2s = s^2 \text{ جتا } 2s$

(د)  $hs^{1+} = s^2$  .

[ ٢ ] أوجد معادلتى المماس والناظم لبيان المنحنى :  $s^2 + 3s^2 = 4$  عند النقطة ( ١ ، ١ ) .

[ ٣ ] أوجد معادلة المماس للمنحنى  $s^2 - s + s^2 = 3$  عند النقطة ( ١ ، ٢ ) الواقعة على هذا المنحنى .

[ ٤ ] أوجد  $s^2$  لكل من :

(أ)  $1 = s^3 - s^3$  (ب)  $2 = \sqrt{s} - \sqrt{s}$  .

(ج)  $s^2 = 8 + \frac{1}{s}$  .

[ ٥ ] أوجد ميل المماس للمنحنى :  $s^4 + 1 = s + s^2$  ، عند النقطة ( ٠ ، ١ ) .

## مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة

٦ - ٧

[١] بيّن تحقق شروط مبرهنة رول في كلٍّ من الحالات الآتية :

(١) د (س) = س<sup>٢</sup> - ٢س - ٣ في الفترة [-١، ٣] .

(٢) د (س) = س<sup>٣</sup> - س في الفترة [٠، ١] .

(٣) د (س) =  $\frac{س^٢ - س - ٦}{س - ١}$  في الفترة [-٢، ٣] .

[٢] إذا كانت ص = س<sup>٢</sup> + ٢س + ١ دالة حيث  $١ \geq س \geq -٤$  ، فأوجد

ب [٣، ٤] ، بحيث يكون د'(ب) =  $\frac{د(٤) - د(١)}{٤ - ١}$  .

[٣] بيّن فيما إذا كانت الدالة د (س) تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [٠، ٢]

حيث د (س) =  $\left. \begin{array}{l} س^٢ \\ س - ٢ \end{array} \right\}$  ،  $٠ \leq س < ١$  ،  $١ \leq س \leq ٢$

[٤] أوجد قيم ب الناتجة من تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة

د : [-٢، ٤] ← ح ، د (س) = س<sup>٢</sup> + ١ .

[٥] إذا كانت د (س) = س<sup>٢</sup> + س - ١ متصلة في [-٢، ١] :

(١) ابحث تحقق شروط مبرهنة رول للدالة .

(٢) أوجد قيمة ب ، ب [٢، ١] بحيث د'(ب) = ٠ .

## القيم القصوى

٦ - ٨

[١] بيّن فترات تزايد وتناقص كل من الدوال الآتية :

$$(١) \quad \text{ص} = ٣س^٢ - س^٣$$

$$(٢) \quad \text{ص} = |س|$$

$$(٣) \quad \text{ص} = \sqrt{س} ، س \leq ٠$$

$$(٤) \quad \text{ص} = س^٢ + \frac{٣}{س}$$

$$(٥) \quad \text{د} (س) = س + جاس \quad \text{على الفترة } [٠, \frac{\pi}{٢}]$$

$$(٦) \quad \text{هـ} (س) = \sqrt{٤س^٢ - ٢س}$$

[٢] أثبت أن  $\text{و} : \text{ح} \leftarrow \text{ح}$  ، حيث  $\text{و} (س) = ١ - س - س^٢$  دالة تناقصية على مجموعة تعريفها .

[٣] أوجد القيم القصوى المحلية لكل من الدوال التالية، ثم بيّن نوع كل من هذه القيم :

$$(١) \quad \text{ص} = ٣س^٢ - س^٣ . \quad (٢) \quad \text{ص} = (٣ - س)^٣ .$$

$$(٣) \quad \text{د} (س) = |جاس| ، س \in [٠, \frac{\pi}{٢}] .$$

$$(٤) \quad \text{و} (س) = س|س| ، س \in [-١, ٢] .$$

$$(٥) \quad \text{و} (س) = \left. \begin{array}{l} س - ٢ \\ س^٢ \end{array} \right\} ، \begin{array}{l} س > ١ \\ س \leq ١ \end{array}$$

[ ٤ ] أوجد القيم القصوى المطلقة لكل من الدوال التالية، وبين نوع كل من هذه القيم :

$$(1) \quad \left. \begin{array}{l} 1 - s \geq s > 2 \\ 2 \leq s \leq 3 \end{array} \right\} = (s) \text{ و } (s) = 6 - s$$

$$(2) \quad د (s) = (s - 1)^2 \text{ في الفترة } [1, 2]$$

$$(3) \quad د (s) = (s) = 4s^2 + 6s - 24 \text{ في الفترة } [1, 3] .$$

[ ٥ ] حدد فترات التقعر ، ثم أوجد نقطة الانعطاف لمنحنيات الدوال الآتية :

$$(1) \quad د (s) = (s) = 3s^2 - 1$$

$$(2) \quad هـ (s) = (s) = 4s^2 - 2s^4$$

$$(3) \quad \text{و } (s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$(4) \quad د (s) = (s) = \text{جاس} + \text{جتاس} , s \in [0, \pi^2]$$

## دراسة تغيّر الدالة

٩ - ٦

[ ١ ] ادرس تغيرات الدوال التالية ، ثم ارسم بيانها :

$$(1) \quad \text{ص} = (s) = 3s^2 + 1$$

$$(2) \quad \text{ص} = (s) = 2s^2 + s^4 + 1$$

$$(3) \quad \text{ص} = \frac{s^2 - 5s + 11}{s - 2}$$

$$(4) \quad \text{ص} = \frac{2s}{1 - s^2}$$



$$\begin{array}{ll}
 (5) \quad \frac{s-4}{1-s} = \text{ص} & (6) \quad \frac{s^2}{s^2-1} = \text{ص} \\
 (7) \quad \frac{1}{s} + s + 1 = \text{ص} & (8) \quad \frac{3}{s-2} = \text{ص} \\
 (9) \quad \frac{s}{s-3} - 2 = \text{ص} & (10) \quad \frac{1}{s+1} - s = \text{ص} \\
 (11) \quad \frac{s^2}{s-3} = \text{ص} & (12) \quad \frac{1}{s} = \text{ص}
 \end{array}$$

### تمارين عامة

[١] لتكن د (س) ، م (س) دالتين قابلتين للاشتقاق عند  $s=1$  ، وكان هـ (١) = ٢ ، هـ (١) = ٣ ، م (١) = ٥ ، م (١) = ٠ ، فاحسب قيمة كلاً مما يأتي عند  $s=1$  .

$$(أ) \quad \frac{s}{s} \left( \frac{h}{m} \right) \quad (ب) \quad \frac{s}{s} (m \cdot h)$$

[٢] أوجد قيم د (٣) ، د (٠) ، د (٤-) لكل من الدوال الآتية :

$$(1) \quad \text{ص} = s - 4 \quad (2) \quad \sqrt{s+4} = \text{ص}$$

$$(3) \quad \text{ص} = \frac{s+1}{s-1} \quad (4) \quad \text{ص} = s | s = 2$$

$$(5) \quad \text{ص} = s^2 (2s^2 + 7) \quad \text{هـ} \sqrt{s} + 5$$

$$(6) \quad \text{ص} = 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}$$

[٣] أوجد  $\frac{s^3}{s^3}$  لكل من الدوال التالية :

$$(1) \quad \text{ص} = (s^2 + 1)^{100} \quad (2) \quad \text{ص} = \text{جتا هـ} \sqrt{s^2 + 1} + 2 \text{ جا هـ}$$

$$(3) \left. \begin{array}{l} s^2 + 2 > s \\ s^2 + 1 \leq s \end{array} \right\} = \text{ص}$$

$$(4) \text{ص} = s^2 \sqrt{s^2 + 1} + \text{قاس}$$

$$(5) 2 \text{ص} - 5 \text{س} = 3 \text{س}^2$$

[ ٤ ] أوجد المشتقة النونية لكل من الدوال التالية :

$$(أ) \text{ص} = s^7 \quad (ب) \frac{1}{\sqrt{s}} = \text{ص}$$

$$(ج) \text{ص} = \text{جا } 2 \text{س} \quad (د) \text{ص} = \text{لوس}$$

$$(هـ) \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$$

$$[ ٥ ] \text{ لتكن د (س) } = \left. \begin{array}{l} s^2 + 2 < s \\ s^3 \geq s \end{array} \right\}$$

أوجد - إن أمكن - د' (١) ، د' (١) ، د' (٤) .

[ ٦ ] إذا كانت د (س) =  $s^2 + \text{هـس} + \text{ج}$  ، فعين قيم الثوابت  $\theta$  ،  $\text{هـ}$  ،  $\text{ج}$

التي تحقق : د (٠) = ٣ ، د' (١) = ٣ ، د' (س) = ١ .

[ ٧ ] احسب النهايات التالية عندما يسعى متغيرها نحو القيمة المرافقة ، علماً بأنه مقدراً

بالراديان :

$$(1) \text{س} \text{ ظتا } 5 \text{س} ، \text{س} \leftarrow 0 \quad (2) \frac{1 - \text{ظاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{4}} ، \text{س} \leftarrow \frac{\pi}{4}$$

$$(3) \frac{2 \text{س} - \pi}{\text{جتا } \text{س}} ، \text{س} \leftarrow \frac{\pi}{2} \quad (4) \frac{1 - s^2}{\text{جتا } \frac{\pi}{2} \text{س}} ، \text{س} \leftarrow 1$$

[ ٨ ] ابحث اتصال الدوال التالية عند  $s = ٠$

$$(١) \quad d(s) = |جتا s| |جا s| \quad (٢) \quad d(s) = جا ٢ s + ٢$$

$$(٣) \quad d(s) = ظا s قاس \quad (٤) \quad d(s) = ٣ + ظا ٢ s$$

$$(٥) \quad d(s) = \frac{|جا s|}{جا s}$$

[ ٩ ] احسب قيمة  $v^{(٥)}$  للدالتين التاليتين :

$$(١) \quad v = جا s$$

$$(٢) \quad v = \frac{١}{٥} s^٥ + s^{-٢} - \frac{٣}{٢} s^{\frac{١}{٣}}$$

[ ١٠ ] عيّن فيما إذا كانت الدوال التالية تحقق مبرهنة رول على الفترات التي أمام كل

منها وإذا تحققت أوجد قيم  $s$  الناتجة عن هذه المبرهنة في كل منها :

$$(١) \quad d(s) = \frac{١}{٣s + ١} \quad \text{على الفترة } [-١, ١]$$

$$(٢) \quad d(s) = s(s - ٢)^٢ \quad \text{على الفترة } [٠, ٢]$$

$$(٣) \quad d(s) = جا s \quad \text{على الفترة } [٠, \pi]$$

[ ١١ ] عيّن فيما إذا كانت الدوال التالية تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترات المرافقة

لكل منها، ثم أوجد قيم  $b$  الناتجة عن هذه المبرهنة إذا كانت الدوال تحقق المبرهنة :

$$(١) \quad d(s) = s - جتا \pi s \quad \text{على الفترة } [٠, ١]$$

$$(٢) \quad d(s) = جتا s + s \quad \text{على الفترة } [٠, ٢\pi]$$

$$(٣) \quad d(s) = s + \frac{٢}{s} \quad \text{على الفترة } [١, ٢]$$

[ ١٢ ] تصل الطاقة الانتاجية اليومية لمصنع الغزل والنسيج بصنعاء إلى ( ١٥٠ ) قطعة من القماش ، فإذا كانت دالة بيع س قطعة هي : ع ( س ) = ١٥٠٠ س - ٤ س<sup>٢</sup> حيث ع ( س ) مقدرة بالريال ، ودالة التكلفة هي :  
ت ( س ) = ٥٠٠ س + ٢٠٠٠ حيث ت ( س ) مقدرة بالريال ، فأوجد عدد الوحدات ( س ) التي يجب ان يبيعها المصنع لتحقيق أعلى ربح .

[ ١٣ ] أوجد ميل المماس للمنحنيات الآتية :

$$\begin{aligned} (١) \quad & س^٢ + ص^٢ = س + ٤ \quad \text{عندة النقطة } (٠, ٢) \\ (٢) \quad & س^٢ + ص^٢ - ٢س - ٤ص = ٥ \quad \text{عندة النقطة } (٢, -١) \\ (٣) \quad & ص = جا٢س - جتا٤س \quad \text{عندما } س = \frac{\pi}{٤} \\ (٤) \quad & ص = ظ٣س + ٢جتاس \quad \text{عندما } س = ٠ \end{aligned}$$

[ ١٤ ] ادرس تغيرات كل من الدوال التالية ، ثم ارسم بيانها :

$$\begin{aligned} (١) \quad & ص = ٣ + \frac{١}{٢-س} \\ (٢) \quad & د (س) = \frac{س^٣ + س^٢ + ١}{س^٢} \\ (٣) \quad & ص = \frac{س(س-١)}{س+١} \\ (٤) \quad & د (س) = \frac{س^٢}{٢-س} \\ (٥) \quad & ص = \frac{س^٣ - ٢س}{س+١} \\ (٦) \quad & د (س) = \frac{س}{س-١} \end{aligned}$$

$$[ ١٥ ] \quad \text{إذا كانت } د (س) = \sqrt{\frac{٣}{٢}(١-س)} \quad , \quad \text{أوجد ما يلي :$$

- أ ) فترات تزايد الدالة وتناقصها .  
ب ) القيم القصوى المحلية أو المطلقة - إن وجدت - .  
ج ) فترات التقعر والتحدب لمنحنى الدالة .  
د ) نقاط الانعطاف لمنحنى الدالة - إن وجدت - .

## اختبار الوحدة

[ ١ ] أ) أوجد نهاية الدالة  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{\text{جا } s}$

ب) ابحث اتصال الدالة  $f(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{s}{\text{جا } s} & , s \neq 0 \\ \text{عند } s = 0 & , s = 0 \end{array} \right.$

[ ٢ ] أوجد مشتقة كلٍّ من الدوال الآتية :

أ) د  $f(s) = (s^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$  ب)  $\sqrt[3]{s} = \sqrt[3]{s}$

ج)  $\text{ص} = \text{لو} \left( \frac{s^2}{\sqrt{s}} \right)$

د)  $\text{ص} = 3e^2 - 5$  ،  $\text{ع} = s^3 + 4s$

هـ)  $\text{ص} = \text{ص}^2 + s^2 + 1$

[ ٣ ] أ) أوجد المشتقة الثانية للدالة  $\text{ص} = \text{جا } s$

ب) بفرض أن :  $s + \text{ص} = s$  ، برهن صحة العلاقة  $\frac{\text{ص}^2}{s^3} = \frac{2}{s^3}$

[ ٤ ] احسب ما يلي :

١)  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\pi}{1+s} \text{ جا } (s^2 - 3)$

٢)  $\lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\text{جا } s - \sqrt[3]{\text{جتا } s}}{(\pi - s)}$

[ ٥ ] ادرس تغيرات الدالة : د  $f(s) = \frac{s^2}{1+s^2}$  ، ثم ارسم بيانها .

# التكامل

## الوحدة السابعة

### التكامل المحدد

٧ - ١

[١] احسب ما يلي :

(أ)  $\int_0^3 x^2 dx$  للدالة  $f(x) = x^2 + 3$  .

(ب)  $\int_1^2 x^3 dx$  للدالة  $f(x) = x^3 - 1$  .

(ج)  $\int_0^1 x^4 dx$  للدالة  $f(x) = x^4 + x^2 + 1$  .

[٢] باستخدام تعريف التكامل المحدد أوجد مايلي :

(أ)  $\int_0^3 (x^2 + x + 2) dx$  . (ب)  $\int_1^3 (3x^2 + 2x + 1) dx$  .

(ج)  $\int_0^2 x^3 dx$  . (د)  $\int_1^3 |x - 2| dx$  .

[٣] (أ) أيهما أكبر .

(أ)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx$  أم  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \sec^2 x} dx$  .

(ب) أثبت كلاهما يأتي :

(١)  $\int_0^1 x^2 dx \geq \int_0^1 x dx$  .

(٢)  $\int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 (1 + x^2) dx$  .

[٤] أوجد الحدين الأدنى والأعلى للآتي :

(أ)  $\int_0^1 (1 + x^2) dx$  . (ب)  $\int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx$  . (ج)  $\int_0^1 (x^2 - 2x) dx$  .

## التكامل غير المحدد

٧ - ٢

[١] احسب التكاملات الآتية :

$$(أ) \int (س - \sqrt{س} + \frac{1}{س}) دس \quad (ب) \int (ع - \frac{3}{ع}) دع$$

$$(ج) \int (\frac{س^2 - س + 1}{\sqrt{س^3}}) دس \quad (د) \int س (س - \frac{3}{س}) دس$$

$$(هـ) \int \sqrt[9]{س} (س - 3) دس \quad (و) \int س^3 (س - س^2 + \frac{1}{س^2}) دس$$

[٢] احسب ماييلي :

$$(أ) \int (س - طاس + 3) دس \quad (ب) \int 3س دس$$

$$(ج) \int 5س دس \quad (د) \int 7س دس$$

$$(هـ) \int \frac{4 - هـ^2}{هـ + 2} دهـ \quad (و) \int (س - هـ^2 + 5س) دس$$

[٣] احسب ماييلي :

$$(أ) \int (\frac{\pi}{4})^{س-2} دس \quad (ب) \int 3س دس$$

$$(ج) \int |س - 1| دس \quad (د) \int (\frac{2}{س} - \frac{3}{س^2}) دس$$

$$(هـ) \int 3(س - 2) دس$$

[٤] (أ) لتكن :  $\frac{ص}{س} = س^2 - 3س + 2$  . أوجد ص علماً بأن المنحنى

يمر بالنقطة (١، ٢) .

[٥] أوجد الدالة الأصلية للدالة د (س) = س<sup>٢</sup> - س -  $\frac{٣}{س^٢}$  ، إذا علمت أن ل (٠) = -٣ .

[٦] أوجد قيم جـ وفق مبرهنة القيم المتوسطة في حساب التكامل في كل مما يأتي :

أ)  $\int_{-١}^٤ (١ - \sqrt{s}) ds$  . ب)  $\int_{-٣}^٢ (س^٢ - ٢س) ds$  .

ج)  $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\pi}{٤} ds$  .

### التكامل بالتعويض

٧ - ٣

احسب التكاملات الآتية بالتعويض :

[١]  $\int \sqrt{s+٢} ds$  . [٢]  $\int \frac{١}{s^٢} ds$  .

[٣]  $\int \frac{s^٢}{(١+s^٢)^٢} ds$  . [٤]  $\int \frac{(١+s^٢)^٢}{s} ds$  .

[٥]  $\int \frac{s}{s^٢+١} ds$  . [٦]  $\int \frac{s}{(١-s)^٢} ds$  .

[٧]  $\int \frac{s}{s^٢+١} ds$  . [٨]  $\int \frac{s}{s^٢-٤} ds$  .

[٩]  $\int \frac{s}{s^٢+٩} ds$  . [١٠]  $\int \frac{s}{(١+s^٢)^٢} ds$  .

[١١]  $\int \frac{s^٢}{s^٢+١} ds$  . [١٢]  $\int \frac{s^٢}{s^٢+١} ds$  .



## التكامل بالتجزئة

٧ - ٤

احسب التكاملات التالية باستخدام التجزئة :

$$[1] \int \frac{1}{x^3 \ln x} dx \quad [2] \int \frac{1}{x^3 \ln x} dx$$

$$[3] \int \frac{1}{x^2 \ln x} dx \quad [4] \int \frac{1}{x^2 \ln x} dx$$

$$[5] \int \frac{1}{x^2 \ln x} dx \quad [6] \int \frac{1}{x^2 \ln x} dx$$

$$[7] \int \frac{1}{x^2 \ln x} dx \quad [8] \int \frac{1}{x^2 \ln x} dx$$

## تكامل الدوال الكسرية

٧ - ٥

احسب التكاملات التالية :

$$[1] \int \frac{1}{x^3 \ln x} dx \quad [2] \int \frac{1}{x^3 \ln x} dx$$

$$[3] \int \frac{1}{x^3 \ln x} dx \quad [4] \int \frac{1}{x^3 \ln x} dx$$

$$[5] \int \frac{1}{x^3 \ln x} dx \quad [6] \int \frac{1}{x^3 \ln x} dx$$

## تطبيقات التكامل

٧ - ٦

### ( ٧ - ٦ - ١ ) حساب مساحات بعض السطوح المستوية :

- [ ١ ] احسب مساحة المنطقة الواقعة بين منحنى الدالة :  $ص = ٤ - س$  ، والمستقيمين  $س = ٤$  ،  $س = ٩$  .
- [ ٢ ] احسب مساحة المنطقة المحصورة بين القطع المكافئ:  $ص = ٤ - س^٢$  ومحور السينات .
- [ ٣ ] احسب مساحة المنطقة المحصورة بين القطعين المكافئين:  $ص = س^٢$  ،  $ص = س^٢$  .
- [ ٤ ] إذا كانت د (س) = جاس ، هـ (س) = جتاس ،  $ص = ١ - س^٢$  ،  $ص = ١$  . فأوجد :

أ ( المساحة المحصورة بين منحنى د (س) ، هـ (س) في الفترة  $[ ٠ , \frac{\pi}{٢} ] \supset م س$  (محور السينات) .

ب ( المساحة المحصورة بين منحنى د (س) ، هـ (س) ، والمستقيم  $ص = ٢$  في الفترة  $[ ٠ , \frac{\pi}{٢} ] \supset م س$  .

ج ( المساحة المحصورة بين منحنى د (س) ، هـ (س) ،  $ص = ١$  ،  $[ ٠ , \frac{\pi}{٢} ] \supset م س$  .

### ( ٧ - ٦ - ٢ ) الحجم الدورانية :

- [ ١ ] أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى  $ص = ٢ - س^٢$  والمستقيمين  $ص = ٢ - س^٢$  ،  $س = ٢$  ،  $ص = ٠$  دوران كاملة حول محور السينات .
- [ ٢ ] أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المستوية المحصورة بالمنحنيين  $ص = هـ^٢$  ،  $ص = هـ^٢$  دورة كاملة حول محور الصادات .
- [ ٣ ] أثبت أن حجم الخروط القائم  $= \frac{\pi}{٣} نوه^٢ ع$  ، حيث ع ارتفاعه ، نوه نصف قطر قاعدته .

## تمارين عامة

[ ١ ] باستخدام تعريف التكامل المحدد احسب ما يأتي :

$$(أ) \int_1^3 (س - ٢) دس . \quad (ب) \int_{-1}^2 (س^٢ + س - ١) دس .$$

[ ٢ ] برهن ما يأتي :

$$(أ) \int_{-1}^1 \sqrt{س} دس \geq \int_{-1}^1 \sqrt{س} دس .$$

$$(ب) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا } س دس \geq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا } س دس .$$

[ ٣ ] أوجد الحدين الأدنى والأعلى للآتي :

$$(أ) \int_1^2 (س + ١) دس . \quad (ب) \int_1^2 س دس .$$

$$(ج) \int_{-1}^3 \frac{س^٣ + ١}{س^٢ + ١} دس . \quad (د) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{١}{\sqrt{٢ + \text{جا } س}} دس .$$

[ ٤ ] احسب التكاملات التالية :

$$(أ) \int (س - \text{جا } س + \text{جتا } س) دس . \quad (ب) \int \left( \frac{١}{س^٣} - س^٢ \right) دس .$$

$$(ج) \int_1^2 (س^٣ - ٣س + ١) دس . \quad (د) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{س} - \sqrt[٣]{س}) دس .$$

$$(هـ) \int (١ - س) \text{ظا } (س - ١) دس . \quad (و) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{س^٢}{س \text{لو } س} دس .$$

[ ٥ ] أوجد قيم جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة في حساب التكامل لكل مما يأتي :

$$(أ) د(س) = (س^٢ - ٣) ، \quad س \in [١، ٤] .$$

$$(ب) د(س) = (س^٢ - س) ، \quad س \in [٣، ٣ -] .$$

$$(ج) د(س) = (س^٢ - س^٣) ، \quad س \in [٣، ١ -] .$$

احسب التكاملات التالية :

$$[6] \int \sqrt[2]{s-1} \, ds \quad [7] \int \frac{جاس}{(1+جتاس)^2} \, ds$$

$$[8] \int (1+s) \sqrt[2]{s^2+2s+5} \, ds$$

$$[9] \int (s^3+6s)(s^2+s) \, ds$$

$$[10] \int s^3 جتاس^4 \, ds \quad [11] \int s^2 جاس^2 \, ds$$

$$[12] \int \frac{س}{س^2+4} \, ds \quad [13] \int \frac{س}{\sqrt[3]{9-4س^2}} \, ds$$

$$[14] \int جاس جتاس \, ds \quad [15] \int \frac{س^- - س^-}{س^- + س^-} \, ds$$

$$[16] \int \frac{جاس}{س(س-س)} \, ds \quad [17] \int \frac{س}{س(س+9س)} \, ds$$

$$[18] \int \frac{1-طاس}{س+لو جتاس} \, ds \quad [19] \int \frac{س}{س(س+1)} \, ds$$

$$[20] \int \frac{1-جاس}{س+جتاس} \, ds \quad [21] \int s^2 جاس \, ds$$

$$[22] \int \frac{لوس}{س^2} \, ds \quad [23] \int \frac{س}{(1+s) \sqrt[2]{2+س}} \, ds$$

$$[24] \int س(لوس)^2 \, ds \quad [25] \int s^2 س^- \, ds$$

$$[26] \int س^- س^- \, ds \quad [27] \int (س+س) س^- \, ds$$

$$[28] \int س لو(س+1) \, ds \quad [29] \int \frac{س^- (2-س)}{س^4} \, ds$$

$$[30] \int جتاس^2 لو جاس \, ds \quad [31] \int \frac{س+1}{س^3-س^2-2س} \, ds$$

$$[32] \left\{ \frac{s^3 + 1}{s^2 + 1} , s \right\} .$$

$$[33] \left\{ \frac{s^2}{s^2 - 4} , s \right\} .$$

[34] أوجد مساحة السطح المستوي المحصور بين بيان كل من منحنيات ومستقيمات الدوال في كل ممايتي :

- (أ) د (س) = س + ٢ ، ص = ٠ ، س - ٤ = ص ، س = ٢ .  
 (ب) ص = ٥ س - س<sup>٢</sup> ، ص = ٠ ، س - ٢ = ص ، س = ٨ .  
 (ج) ص = جتا س ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س =  $\pi$  .  
 (د) ص = ٨ - س<sup>٢</sup> ، ص = س<sup>٢</sup> ، س = ٠ ، س = ١ .  
 (هـ) س = ٤ - س ، ص = س ، ص = ٠ .  
 (و) د (س) = ٦ س - س<sup>٢</sup> ، ص = س<sup>٢</sup> - ٢ س .  
 (ز) ص = جاس ، ص = جتا س ، ص =  $\frac{1}{2}$  .  
 (ح) ص = لوس ، ص = ٠ ، س = ٢ .

[35] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المستقيم :  $\frac{s}{3} + \frac{s}{2} = ١$  .

ومحورى الإحداثيات أولاً : حول محور السينات . ثانياً : حول محور الصادات

[36] احسب حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى ص<sup>٢</sup> = جا  $\sqrt{s}$

س < ٠ ، والمستقيمات : ص = ٠ ، س = ٠ .

س =  $\frac{2}{\pi}$  دورة كاملة حول محور السينات .

[37] تتحرك نقطة مادية بتسارع ج = (٦ + ٤) سم / ث<sup>٢</sup> ، بدأت سرعة ٢ سم / ث

من نقطة تبعد ١٠ سم عن نقطة الأصل ، أوجد سرعتها وبعدها عن نقطة الأصل بعد ثانييتين من الحركة .

## اختبار الوحدة

أجب عن جميع الأسئلة التالية :

[١] أ) باستخدام تعريف التكامل المحدد ، احسب  $\int_1^3 (s^2 + 8) ds$  .  
ب) برهن على أن :

$$\int_1^3 s^2 ds \geq \int_1^3 s^4 ds$$

ج) أوجد الحدين الأدنى والأعلى لـ :  $\int_{-1}^2 \frac{s}{1+s^2} ds$  .

[٢] أ) أوجد قيمة جـ التي تحقق مبرهنة القيمة الوسطى في حساب التكامل للتالي :

$$\int_0^2 (s^2 + 1) ds$$

ب) لتكن ميل المماس لمنحنى دالة هو  $3s^2 + 2s + 5$  ، والمنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٥) ، أوجد معادلة المنحنى .

ج) احسب مايلي :

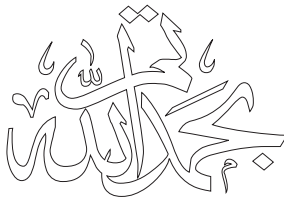
$$(1) \int_1^{\sqrt[3]{s}} \frac{s}{s^3 - 3} ds \quad (2) \int_0^2 s^2 \sqrt{s^3 + 3} ds$$

[٣] أ) احسب المساحة المحصورة بين المنحنى  $s^2 = 8s$  ، والمستقيم  $s = 2$  .

ب) احسب الحجم المتولد من دوران المنطقة المحددة بالمستقيمات  $s = 3 + 1$  ،  $s = 0$  ،  $s = 0$  ،  $s = 2$  .

[٤] أ) احسب مايلي :

$$(1) \int_0^5 s \cos s ds \quad (2) \int_0^1 \frac{s}{(s+1)^2} ds$$



## استبانة تقويم الكتاب

### بيانات المستجيب:

الاسم /.....	المؤهل وتاريخه /.....	التخصص /.....
العمل الحالي /.....	المحافظة /.....	

### بيانات الكتاب:

المادة /.....	الصف /.....	اسم الكتاب /.....
الجزء /.....	الطبعة /.....	السنة الدراسية /.....
تاريخ تعبئة الاستبانة /.....		

نهدف من هذه الاستبانة تقويم الكتاب بغرض تحسينه في الطبقات القادمة.  
نرجو التكرم بوضع علامة (✓) تحت الوصف الذي تراه مناسباً لإجابتك أمام كل بند.

البيانات	جدا	جيد	مقبول	ضعيف
<b>أولاً - الأهداف:</b>				
- وضوح الصياغة.				
- تقيس فكرة محددة.				
- يمكن قياسها.				
- شاملة (معرفية - مهارية - وجدانية).				
<b>ثانياً - المادة العلمية وأسلوب عرضها:</b>				
- ملائمة لغة الكتاب لمستوى المتعلم.				
- سلامة ووضوح لغة الكتاب.				
- ترسيخ المحتوى للقيم الدينية والوطنية.				
- مادة الكتاب تكسب المتعلم خبرات جديدة.				
- ملائمة المادة لمشكلات المتعلم واهتماماته.				
- مادة الكتاب تساعد المتعلم على فهم المشكلات.				
- مادة الكتاب تراعي الفروق الفردية.				
- خلو الكتاب من التكرار في الموضوعات.				
- يراعي أسلوب عرض المادة الترابط والتسلسل المنطقي.				
- مراعاة مادة الكتاب للحدثة والدقة العلمية.				
- عرض المادة تحفز على القراءة والبحث والتفكير.				
- تحقيق المحتوى لأهداف المادة.				
<b>ثالثاً - الوسائل التعليمية:</b>				
- وضوحها ودقتها.				
- ارتباطها بموضوعات الدرس.				
- مدى ارتباطها بالأهداف.				
<b>رابعاً - التقويم:</b>				
- الأنشطة والتمارين تكسب المتعلم مهارات متنوعة.				
- بطاقات التفكير تثير دافعية البحث والإطلاع.				
- الأسئلة والتمرينات تقيس مدى تحقيق الأهداف.				
- مناسبة لمستوى المتعلم.				
- دقة ووضوح الصياغة.				
- تراعي الفروق الفردية.				
- متنوعة وشاملة للجوانب المعرفية.				
- تساعد المتعلم في تطبيق ما تعلمه في مواقف الحياة المختلفة.				
- كفاية الأسئلة في مساعدة المتعلم على استيعاب مادة الكتاب.				
<b>خامساً - الشكل والإخراج الفني:</b>				
- ارتباط الغلاف بمحتوى الكتاب.				
- متانة تجليد الكتاب.				
- وضوح الألوان ومناسبتها.				
- وضوح ودقة الطباعة.				
- نوعية ورق الكتاب.				



**أُسْئَلَةُ عَامَّةٌ، أَجِبْ بِ (نَعَمْ) أَوْ (لا):**

	نعم	لا	البند
- ينسجم محتوى الكتاب مع نظام الفصلين الدراسيين .			
- عدد الحصص المقررة تكفي لا استيعاب مادة الكتاب.			
- هل الوسائل التعليمية متنوعة وكافية ؟			
- هل هناك ضرورة لوجود قائمة بالمراجع ومصادر المعلومات ؟			
- هل هناك موضوعات ترى ضرورة حذفها (اذكرها) ؟			
- هل هناك موضوعات ترى ضرورة إضافتها (اذكرها) ؟			

✍ إذا كان لديك ملاحظات أخرى اكتبها .....

.....

.....

.....

.....

## قائمة الأخطاء العلمية واللغوية والمطبعية:

[illegible]

الدولة العامة للمناهج

تيلفكس : ٠١/٥٧٥٥٤٩

ص. ب: (٣٥٢٨) صنعاء - الجمهورية اليمنية

البريد الإلكتروني: [manhg2013@hotmail.com](mailto:manhg2013@hotmail.com)

أو إدارة المناهج بمكتب التربية بالمحافظة

**نرجو التكرم بإرسال الاستبانة إلى**



